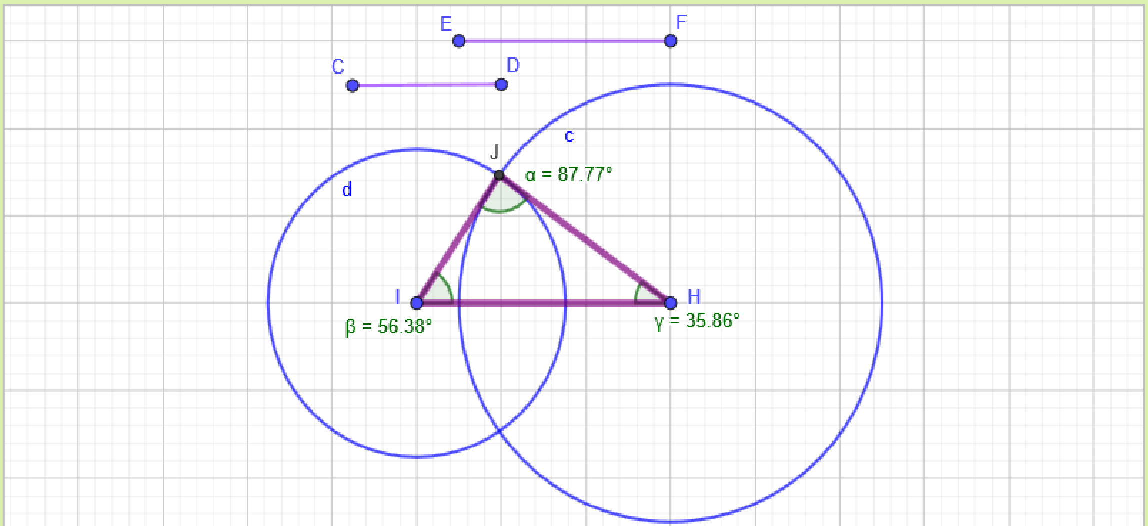
Mestrado Profissional
em Educação Matemática



Tarefas matemáticas inspiradas nos "Elementos" de Euclides e desenvolvidas no GeoGebra

Volume 2

Thais Maria Barbosa Goulart

Ana Cristina Ferreira
Jorge Luís Costa

Tarefas matemáticas inspiradas nos "Elementos" de Euclides e desenvolvidas no GeoGebra

Mestrado Profissional em Educação Matemática

EDITORA UFOP

Ouro Preto | 2020

Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas | Departamento de Educação Matemática
Programa de Pós-Graduação | Mestrado Profissional em Educação Matemática

Reitora da UFOP | Profa. Dra. Claudia Aparecida Marliére de Lima
Vice-Reitor |Prof. Dr. Hermínio Arías Nalini Júnior

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E BIOLOGIAS
Diretor | Prof. Dr André Talvani Pedrosa da Silva
Vice-Diretor | Prof. Dr. Rodrigo Fernando Bianchi

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Pró-Reitora | Prof. Dr. Sergio Francisco de Aquino
Pró-Reitora Adjunta | Profa. Dra. Renata Guerra de Sá Cota

Mestrado Profissional
em Educação Matemática

Coordenação | Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti

MEMBROS

Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira, Prof. Dr. André Augusto Deodato, Profa. Dra. Célia Maria Fernandes Nunes, Prof. Dr. Daniel Clark Orey, Prof. Dr. Dilhermando Ferreira Campos, Prof. Dr. Douglas da Silva Tinti, Prof. Dr. Edmilson Minoru Torisu, Prof. Dr. Frederico da Silva Reis, Prof. Dr. Jorge Luís Costa, Profa. Dra. Marger da Conceição Ventura Viana, Profa. Dra. Marli Regina dos Santos, Prof. Dr. Milton Rosa, Prof. Dr. Plínio Cavalcanti Moreira.

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

G694t Goulart, Thais Maria Barbosa.
Tarefas matemáticas inspiradas nos "Elementos" de Euclides e desenvolvidas no GeoGebra [manuscrito]: volume 2. / Thais Maria Barbosa Goulart. - 2020.
92 f.: il.: color..

Orientadora: Profa. Dra. Ana Cristina Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Jorge Luís Costa.
Produção Científica (Mestrado Profissional). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Área de Concentração: Educação Matemática.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Euclides, Elementos de. 3. Matemática - História. 4. Geometria - Estudo e ensino. 5. Ensino fundamental. 6. GeoGebra (Software). I. Costa, Jorge Luís. II. Ferreira, Ana Cristina. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 514:373.3

Bibliotecário(a) Responsável: Sione Galvão Rodrigues - CRB6 / 2526

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

"O que somos de razão e vontade, o que somos de pensamento e ação, o que somos de sensibilidade e frieza, de trabalho e lazer, de descrença e esperança, o que somos de bílis e coração é terem existido outros, é terem traçado rumos, e terem aberto estradas, é terem apontado caminhos!"

(BICUDO, 2009, p. 17)

Expediente Técnico

Organização | Thais Maria Barbosa Goulart

Pesquisa e Redação | Thais Maria Barbosa Goulart | Ana Cristina Ferreira | Jorge Luís Costa

Revisão | Thaís Maria Barbosa Goulart

Projeto Gráfico e Capa | Editora UFOP

Fotos | Thais Maria Barbosa Goulart

Ilustração | Ralf Soares de Mello (Núcleo de Projetos Gráficos/UFOP)

Índice

Reflexões iniciais

Querido(a) professor(a),

No volume 1 deste produto, apresentamos as três tarefas iniciais que fizeram parte da minha pesquisa de campo. Tais tarefas foram de grande importância para o trabalho desenvolvido no laboratório de informática.

Ainda a partir da obra "Elementos", de Euclides, apresento no volume 2 mais reflexões e tarefas desenvolvidas com os alunos do 8° ano do Ensino Fundamental que participaram do estudo.

O GeoGebra fez parte de todas as tarefas e continuamos com a proposta de ensinar Geometria em uma perspectiva histórica para promover a percepção da Matemática como produção humana. Além disso, com o GeoGebra, pretendíamos que os estudantes se tornassem mais ativos na construção do conhecimento matemático.

Convido você, novamente, a conhecer um pouco sobre os resultados e a participação dos alunos durante o trabalho de campo desenvolvido no laboratório de informática. Espero, também, que esse volume possa inspirar você e que possa auxiliá-lo em sua prática docente.

Um grande abraço!

Thais Maria

TAREFA 3 - PRIMEIROS CONTATOS COM O *SOFTWARE* GEOGEBRA: CONSTRUÇÃO DO QUADRADO

Objetivos: Proporcionar um primeiro contato com o GeoGebra, e suas ferramentas, com o mesmo contexto trabalhado nas tarefas 1 e 2; Realizar a construção do quadrado, retomando a história dos altares indianos.
Duração estimada: Duas aulas de 40 minutos
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro, GeoGebra.

Na tarefa 3 (Apêndice F), já no laboratório de informática, retomamos a história dos altares indianos e as duplas voltaram a construir quadrados, porém, agora no GeoGebra. Nosso objetivo foi proporcionar um primeiro contato com o GeoGebra e suas ferramentas, com o mesmo contexto trabalhado nas tarefas 1 e 2: construção do quadrado, a partir da história da construção dos altares indianos e das ideias de Euclides, nos "Elementos". Ao chegarem ao laboratório, cada dupla já tinha seu lugar determinado, os computadores já estavam ligados e com o GeoGebra em tela. Nenhum aluno conhecia o *software*.

Iniciamos a tarefa comentando com as duplas que os altares indianos surgiram muito tempo antes de Euclides e que eles já utilizavam a Matemática, além disso, já existiam vários registros em papiros, barro e couro de animais, mas que eram conteúdos mais voltados para a prática do dia a dia. Explicamos que Euclides foi muito importante porque organizou e estruturou conhecimentos matemáticos de forma lógica, explicando o porquê de se calcular ou fazer as construções de determinada maneira. Nesse momento, alguns alunos estavam um pouco dispersos, olhando para a tela do computador e/ou conversando com os colegas. Outros pareciam atentos às imagens apresentadas à turma, sobre as traduções mais antigas que temos da obra de Euclides. Uma dessas imagens está representada na figura 1[1].

Figura 1 - Cópia dos "Elementos" em latim, com detalhes em ouro, por volta de 1482

Fonte: https://www.wdl.org/pt/item/18198/view/1/6/.

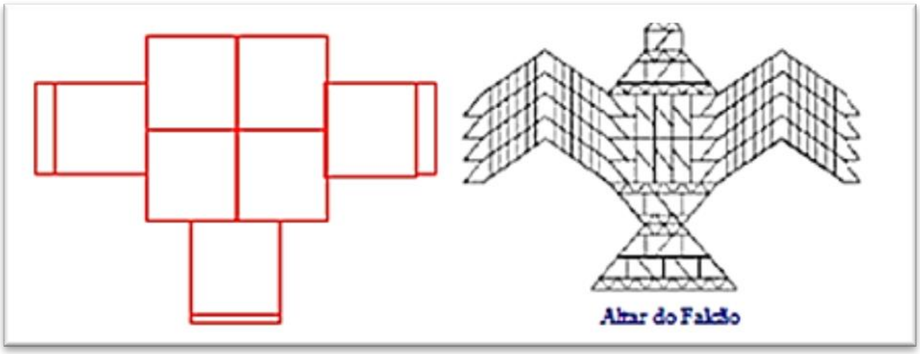
Ao comentar com os alunos que todas as imagens apresentadas, referentes aos "Elementos", são cópias feitas por outras pessoas, João (D6)[2] perguntou:

1 Veja a cópia em grego no site https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions.
2 Utilizamos códigos (D1, D2, D3, ...) para nomear as duplas, mas também usamos nomes fictícios para mencionar os integrantes.

João (D6): Mas, da mesma forma né!?
Prof. Thais: Sim! Geralmente, são traduções completas e eles acrescentam comentários.
João (D6): E atualizando...
Prof. Thais: Como falei no início do trabalho, não existe mais a obra original, mas temos uma tradução direto do grego para o português, aqui no Brasil! Essas daqui (apontando para as imagens) são as mais antigas.
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 04/06/2019).

Em seguida, assistimos a um vídeo[3] que apresenta cenas reais de momentos da construção de um altar do Falcão mais complexo (à direita da figura 2), na Índia, na década de 1970.

Figura 2 - Altar do Falcão



Fonte: Extraído de Gaspar (2003, p 105).

Durante o vídeo, enfatizamos o trabalho dos homens e a construção perfeita dos tijolos (em formato de triângulos e quadriláteros). Nossa intenção foi mostrar como a Matemática era utilizada pelas pessoas comuns na arte, religião e em outras práticas sociais.

3 Utilizamos alguns trechos do vídeo disponível em https://www.youtube.com/watch?v=DLKHQ_HI6OI com duração de 4min40s. Nele, é filmado um ritual de 12 dias, realizado por brâmanes Nambudiri, em Kerala (Índia), em abril de 1975. “Este ritual védico de sacrifício tem mais de 5000 anos e, provavelmente, é um dos rituais humanos mais antigos que ainda sobrevivem” (tradução livre de trecho que aparece na página do vídeo).

Figura 3 - Momento em que as duplas assistiram o vídeo da tarefa 3

Fonte: Dados da pesquisa.

O vídeo chamou a atenção das duplas porque, até então, a única imagem visualizada por eles sobre os altares indianos foi um exemplo do altar do Falcão que encontramos em (GASPAR, 2003, p. 105). Apresentamos ainda imagens reais do altar do Falcão, inclusive algumas bem próximas do modelo construído por eles, como, por exemplo, as figuras 4 e 5, a seguir, que se referem a uma fotografia do altar do Falcão mais complexo (à direita) e ao altar semelhante àquele que trabalhamos na tarefa 2 (à esqueda).

Figura 4 - Fotografia de um dos modelos mais complexos do altar do Falcão

Fonte: http://www.allempires.com/forum/forum_posts.asp?TID=28550.

Figura 5 - Fotografia de um modelo mais simples do altar do Falcão

Fonte: http://www.allempires.com/forum/forum_posts.asp?TID=28550.

Em seguida, comentamos que utilizaríamos o que haviam aprendido nas tarefas anteriores, porém, agora com o uso de um programa no computador. Nossa intenção era familiarizar os alunos com as ferramentas do GeoGebra, especificamente, com as ferramentas para a construção do quadrado, seguindo, na medida do possível, um caminho semelhante ao proposto na construção com régua e compasso físicos. Com o auxílio de um DataShow, projetamos a tela do GeoGebra na parede e fomos mostrando as ferramentas necessárias para cada etapa da construção do quadrado, passo a passo (figura 6). Além disso, retomamos algumas definições de Euclides – sobre reta perpendicular, ângulo reto, dentre outras – ao longo da explicação.

Figura 6 - Momento inicial da Tarefa 3

Fonte: Dados da pesquisa.

A figura 6 mostra o momento da construção do quadrado no GeoGebra:

> *Prof. Thais: Quando começamos a construir o quadrado, foi a primeira figura que fizemos?*
> *Davi (D14): Linha e ponto!*
> *Prof. Thais: Como é o nome dessa linha?*
> *Nicole (D15): Reta.*
> *João (D6): Semirreta.*
> *Prof. Thais: Era reta ou semirreta?*
> *Vários alunos juntos: Reta.*
> *Prof. Thais: Então, a primeira figura que vocês irão construir agora é uma reta. Para isso vocês precisam clicar nesse botão, nessa ferramenta (apontado para a projeção). [...]*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 04/06/2019).

Verificamos que alguns alunos ainda confundiam as noções de reta e semirreta. Contudo, considerando que esse era o primeiro contato com o GeoGebra, observamos que a maioria das duplas localizou as ferramentas rapidamente.

Para construir a reta na janela de visualização, é preciso clicar em duas regiões. Com isso, algumas duplas solicitaram ajuda:

> *Davi (D14): Professora, apareceu outra.*
> *Professora: Ah! Clique na seta (botão) que sairá.*
> *Davi (D14): Ah tá! Pronto.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 04/06/2019).

Com a ferramenta "Reta" selecionada, ao inserir um clique a mais, outra reta surge, e isso gerou insegurança por parte dos alunos. Foi necessário aguardar alguns instantes até prosseguir, já que outras duas duplas solicitaram ajuda para utilizar a ferramenta.

Com a reta construída no GeoGebra, dissemos aos alunos que iríamos colar na parede aquelas definições que havíamos estudado no início das nossas aulas. A primeira era a linha reta que Euclides definiu como aquela "que está posta por igual com os pontos sobre si mesma" (BICUDO, 2009, p. 97). Com isso, a tarefa 3 consistiu em construir o quadrado no GeoGebra, assim como foi construído com os instrumentos físicos, evidenciando cada figura pertencente a essa figura geométrica e associando as propriedades que definem o quadrado com as definições de Euclides. Dessa forma, para cada etapa da construção do quadrado, colávamos as plaquinhas na parede com a definição apresentada por Euclides em “Elementos”.

Para utilizar a ferramenta “Compasso”, fizemos uma associação com o compasso físico disponível na mesa de cada dupla. Mostramos que a ferramenta no GeoGebra teria a mesma função, porém, a abertura do compasso no programa seria a partir do clique nas extremidades de um segmento. Com isso, mesmo que os conceitos de círculo e circunferência ainda não tivessem sido trabalhados, a utilização do instrumento nas tarefas anteriores permitiu que a construção de círculos fosse mais rápida. Assim que o círculo surgiu na tela do computador, alguns alunos se mostraram surpresos.

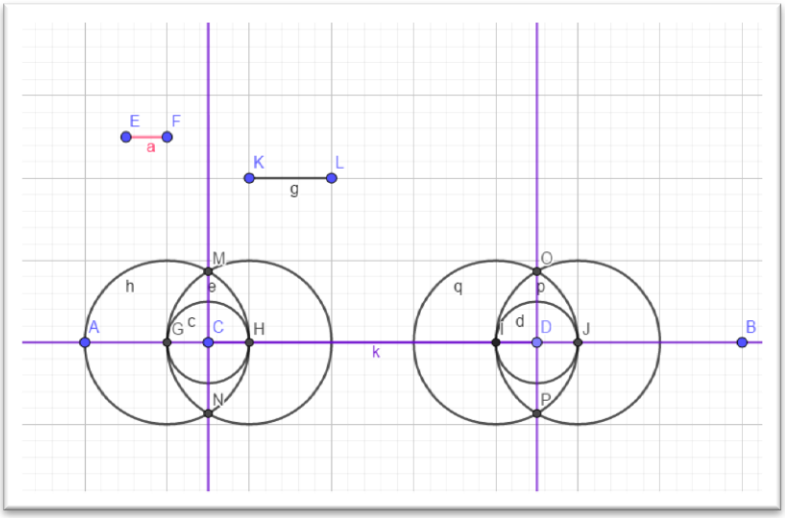
Essa tarefa teve duração de duas aulas de 30-40 minutos cada. Na primeira, conhecemos as ferramentas como “Ponto”, “Reta” e “Segmento” e, na segunda, utilizamos o “Compasso” para o término da construção do quadrado. Na medida em que utilizavam uma ferramenta, percebemos que as duplas ganhavam habilidade e agilidade. Na segunda aula, observamos uma diminuição nas dúvidas em relação ao uso das ferramentas.

A maioria das duplas conseguiu finalizar a construção do quadrado. Algumas construíram o quadrado de forma bem rápida, e outras necessitaram da ajuda dos colegas. A figura 7, por exemplo, apresenta a construção pela dupla D2, primeira dupla a terminar o quadrado ainda no início da segunda aula.

Por meio da gravação em áudio e do registro no diário de campo, verificamos que as alunas Bia e Bruna (D2) discutiam a construção dos círculos, enquanto ainda mencionávamos sobre como utilizar o “Compasso”:

Bruna (D2): Colocar em K e L.
Bia (D2): Não é na bolinha, é na...
Bruna (D2): Huum
Bia (D2): Uai... tá errado. A gente nunca fez, como que a gente está fazendo?
Bruna (D2): Thais, Thais... Estamos um pouquinho adiantadas.
Professora: Deixa-me ver. Oh! Muito bem, meninas.
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 07/06/2019).

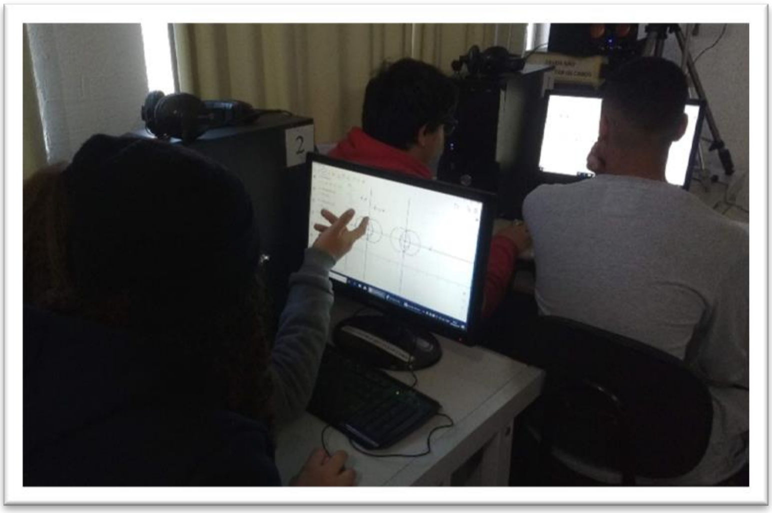
Figura 7 - Etapa final da construção do quadrado no GeoGebra pela dupla D2



Fonte: Dados da pesquisa.

Até esse momento final, a dupla D2 havia chegado à construção expressa na figura 7. Nesse momento, as alunas solicitaram novamente auxílio para confirmar se estava correto. Na figura 8, registramos o exato momento em que as alunas apontavam para a tela do computador, ao apresentar suas dúvidas.

Figura 8 - Construção do quadrado no GeoGebra pela dupla D2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse momento, cada dupla poderá estar em uma parte da construção. Alguns poderão concluir rapidamente, outros precisarão de mais tempo. É uma tarefa que exige um maior dinamismo do professor.

A dúvida das alunas era como continuar a construção, ou seja, como determinar os demais lados do quadrado. Então o professor Márcio auxiliou a dupla e captamos o diálogo através do gravador de voz do computador da dupla.

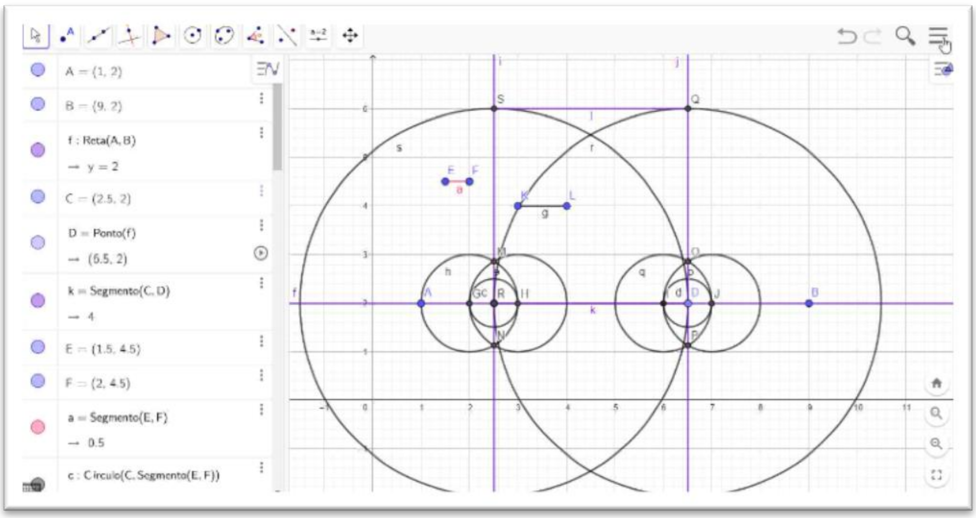
Bia: Professor, está certo?
Prof. Márcio: hmm
Bia: Estamos em dúvida aonde...
Prof. Márcio: Como vocês chegaram nisso?
Bruna: Colocamos um ponto aqui e depois um ponto aqui.
Prof. Márcio: Do nada?
Bruna: É...
Bia: Mas eu falei pra ela que era para pegar a mesma coisa disso aqui...
Prof. Márcio: Vocês têm que levar essa medida pra cá.
Bia: Ah sim!
Bruna: Mas é isso tudo?
Bia: Aí vai ter que pegar daqui desse ponto até esse ponto.
Bruna: (voz de surpresa e risos)
Prof. Márcio: Isso! Agora, essa distância aqui é esse tamanho aqui.
Bia: Aaaah!
Professor Márcio: Você irá fazer a mesma coisa do lado de cá.
Bia: Então eu pego o ponto (ferramenta) e coloco o ponto aqui (interseção)
(o professor Márcio se afastou e elas continuaram)
Bruna: Agora sou eu!
Bia: Mas então devemos retirar esse trem daqui.
Bruna: Pra quê?
Bia: Pega o compasso e coloca daqui até aqui... e agora coloca aqui. Agora ligamos um ponto ao outro.
Bruna: Reta? E agora?
Bia: Esse é o quadrado!

(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 07/06/2019).

Bia e Bruna sempre demonstravam interesse pelas tarefas desenvolvidas, participativas, assim que surgia alguma dúvida, solicitavam auxílio. Durante toda a tarefa, a dupla demonstrava estar à vontade com o computador e o *software*. Além disso, a construção do quadrado já tinha sido realizada pela dupla, da mesma forma, na tarefa anterior, porém, com os instrumentos de desenho físicos (régua e compasso).

Observamos que o diálogo da dupla, as pistas apresentadas pelo professor e, provavelmente, a construção com régua e compasso na tarefa 2 permitiram que Bia e Bruna conseguissem finalizar a construção do quadrado, conforme registrado na figura 9.

Figura 9 - Construção do quadrado finalizado pela dupla D2



Fonte: Dados da pesquisa (imagem obtida por meio do Gravador de Passos do Windows).

Como mencionado anteriormente, essa foi a primeira dupla que construiu o quadrado no GeoGebra. Observamos que o diálogo entre as alunas (exibido anteriormente) foi essencial e, ainda, verificamos que elas intercalavam o comando do *mouse* do computador. Além disso, elas auxiliaram os colegas próximos. Dessa forma, o fato de a dupla D12 ter conseguido realizar rapidamente a construção apresenta indícios de que a fase de preparação (tarefas 1 e 2) foi muito importante para iniciar o trabalho com o GeoGebra.

Nessa tarefa, os alunos tiveram o primeiro contato com o *software* e se mostraram surpresos com suas possibilidades. Embora algumas duplas tenham demonstrado dificuldades na construção (percebidas tanto nas observações do diário de campo quanto no próprio registro das duplas), quase todos chegaram à construção final do quadrado, sozinhos ou com o auxílio dos professores e dos colegas. O professor Márcio esteve presente durante todas as aulas, auxiliando a turma, mesmo quando muitas duplas solicitavam ajuda ao mesmo tempo.

Paralelamente, observamos três posicionamentos diferentes das duplas em relação ao GeoGebra:

(1) aquelas que se arriscavam, faziam testes e/ou dialogavam;
(2) aquelas que constantemente solicitavam auxílio da professora; e,
(3) aquelas que pareciam ter medo ou desinteresse de usar as ferramentas[4].

As duplas que se arriscavam pareciam estar cientes da possibilidade de apagar figuras, refazer ou abrir uma nova janela de visualização do GeoGebra, faziam revezamento quanto à utilização do *mouse* e pareciam muito à vontade com a máquina. Outra característica percebida foi que essas duplas conversavam sobre a atividade, tanto ao realizar as construções no GeoGebra, quanto ao realizar os registros no caderno. As duplas que se comportavam assim, como Bia e Bruna (D2), pareciam começar a desenvolver uma fluência tecno-matemática com essa tarefa, ou seja, habilidades técnicas com a máquina, e habilidades matemáticas (JACINTO; CARREIRA, 2017) que podem ter sido alcançadas devido ao trabalho desenvolvido nas tarefas 1 e 2. Além disso, as duplas que apresentavam essas características solicitavam a presença do professor para mostrar uma construção e/ou confirmar se estava realmente correta, ou, ainda, para esclarecer dúvidas relacionadas a algum conhecimento matemático

Quando uma dupla finalizar uma tarefa, você poderá solicitar que auxilie outros colegas! Boas interações também surgem desses momentos.

[4] Esses posicionamentos foram percebidos tanto em casos nos quais o aluno parecia ter compreendido as noções básicas de Geometria quanto na situação inversa (quando não pareciam ter compreendido). Ou seja, nos pareceu se tratar mais de uma atitude frente ao *software* e à tarefa proposta que um posicionamento influenciado pela facilidade ou dificuldade em compreender as noções matemáticas envolvidas.

que faltava para concluir a construção (como podemos perceber do diálogo de Bia e Bruna).

As duplas que solicitavam frequentemente a presença do professor encontravam alguns empecilhos para realizar a tarefa, como: dificuldades quanto à utilização das ferramentas e quanto à compreensão de termos geométricos. Essas duplas dificilmente realizavam alguma construção totalmente sozinhas e se arriscavam pouco, ou seja, nem sempre tentavam compreender algo a partir de tentativas. Duas duplas pareciam ter receio de utilizar o computador ou algum desinteresse com a tarefa. Essas duplas realizavam as construções apenas quando incentivadas, não solicitavam auxílio e demonstravam dificuldades em localizar ferramentas no GeoGebra.

Esses posicionamentos fazem com que as duplas estejam em momentos diferentes da tarefa e, como os alunos não receberam nenhum tipo de formulário com direcionamentos, algumas duplas, quando finalizavam as tarefas, ficavam dispersas. Nossa proposta é que os alunos sejam conduzidos pelo professor, mas que também tenham liberdade e tempo para exploração. Por um lado, a tarefa exige mais do professor, que, com uma classe de muitos alunos, pode enfrentar inúmeras situações. Por outro lado, os alunos têm mais tempo para dialogar e explorar as figuras.

É importante ressaltar que não foi possível atender todas as solicitações dos alunos durante as tarefas, mesmo com o apoio do professor Márcio, entretanto, muitos alunos se ofereciam para apoiar outros colegas.

É importante enfatizar que a presença de um técnico responsável pelo ambiente, ressaltado por Borba e Penteado (2010), é de suma importância para o desenvolvimento das atividades propostas pelo professor. No nosso caso, tivemos muitos imprevistos anteriormente no laboratório. O laboratório de informática, onde foi realizado a pesquisa de campo, passou a ter uma responsável técnica apenas no final do trabalho.

TAREFA 4 – O CÍRCULO E A CIRCUNFERÊNCIA

Objetivo: Estudar sobre os círculos, circunferências e seus elementos; Abordar sobre a Matemática na cultura chinesa.
Espaço/ambiente: Laboratório de Informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e software GeoGebra.

Realizamos mais uma “viagem no tempo”, dessa vez para a China[5]. Nosso intuito foi abordar o círculo e a circunferência, assim como distingui-los, a partir de uma perspectiva histórica na qual o conhecimento matemático é desenvolvido por um povo, não de modo abstrato ou restrito à própria Matemática, mas como intrinsecamente articulado com práticas sociais fundamentais para tal cultura, no caso, a cosmovisão da mesma.

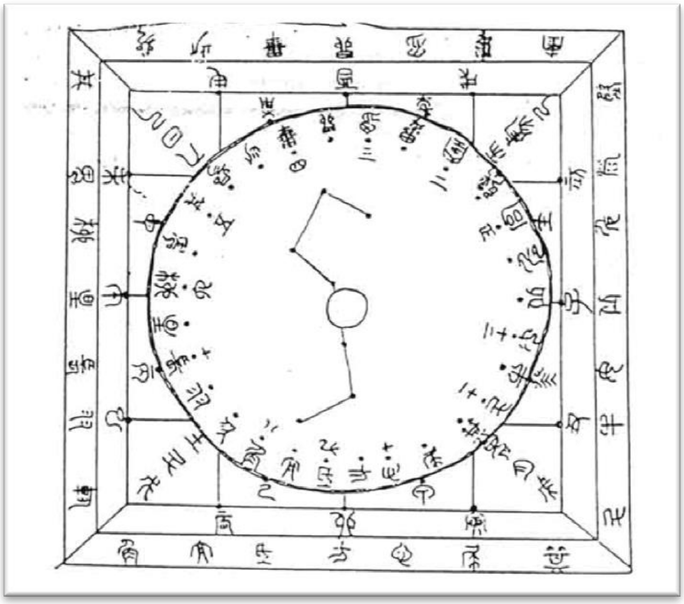
Inicialmente, comentamos com os estudantes que o círculo é uma figura muito presente na obra de Euclides e que a estávamos utilizando muito nas nossas construções. Paralelamente, mostramos novamente aos alunos duas traduções antigas de “Elementos” que possuem em suas páginas algumas construções com o compasso, enfatizando os círculos.

Explicamos à turma oralmente e por imagens (uma delas é a figura 10) que, muito antes de Euclides, várias civilizações utilizavam os círculos, dentre eles, a China. Comentamos com os estudantes que as origens do interesse chinês pelo círculo estão relacionadas com a astronomia e, por meio dela, com a natureza divina do céu, das estrelas e o movimento dos objetos celestes. A figura a seguir mostra a representação de um antigo calendário chinês que possui formas quadrangulares e circulares.

Embora, na tarefa 3, as duplas já tivessem trabalhado com o círculo (e a circunferência) no GeoGebra a partir da ferramenta “Compasso”, ainda não tínhamos apresentado a importância dessa figura para outras civilizações e nos “Elementos”.

Figura 10 - Representação de um antigo calendário chinês.

[5] Ver texto orientador da página 76.



Fonte: http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado.

Segundo a antiga astronomia chinesa, o quadrado pertence à Terra e o círculo ao Céu[6]. No século III a. C., na dinastia *Zhou*, é produzido um texto chamado *Zhoubi* no qual *Shang Gao*, um sábio, conversa com o duque de *Zhou* e diz que "o quadrado pertence à Terra, e o círculo pertence ao Céu. O Céu é um círculo e a Terra é o quadrado. Os números do quadrado são básicos e o círculo é produzido a partir do quadrado"[7].

Neste ponto, destacamos o fato de o conhecimento matemático circular entre distintas culturas, mesmo naquela época, com todas as dificuldades de deslocamento e comunicação. Reforçamos a ideia de que os "Elementos" foram construídos a partir de conhecimentos oriundos de distintas culturas.

[6] Ver mais em http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado.
[7] Mazza, s/d, ver em: https://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm.

Infelizmente, nesse dia, os alunos estavam muito dispersos, muitos estavam realizando construções no GeoGebra. Além disso, na sala ao lado do laboratório de informática, havia um som muito alto devido a um projeto que ocorreu na escola e, por essa razão, muitas vezes era difícil falar e ser ouvida. Essa situação impactou no desenvolvimento da tarefa, mesmo assim, continuamos com o trabalho.

Como já tínhamos estudado sobre os quadrados nas tarefas anteriores, comentamos com os alunos sobre as diferenças entre círculo e circunferência, e alguns de seus elementos, procurando relacioná-los às ideias de Euclides[8], como um caminho para as próximas construções. Essa relação entre os elementos dos círculos e circunferências e as ideias de Euclides ocorreu a partir de plaquinhas com as definições de círculo e diâmetro, e com o postulado 3[9], todas originadas do Livro I de Euclides. Por exemplo, antes de iniciar as construções no GeoGebra, dissemos que Euclides escreveu que “com todo centro e distância, é possível descrever um círculo” (Postulado 3) e que “o ponto é chamado de centro do círculo” (definição 16). Essas ideias de Euclides estão intrínsecas em três ferramentas do GeoGebra: “Círculo dados centro e um dos seus pontos”; “Círculo dados centro e raio”; e “Compasso”.

Todas essas ferramentas foram utilizadas pelos alunos nesse momento da tarefa, para que as conhecessem e estudassem os elementos de um círculo (o centro, o raio e o diâmetro).

Esse momento da tarefa, de fato, foi necessário para que os alunos pudessem conhecer e/ou relembrar os elementos dos círculos e das circunferências, assim como saber diferenciá-los. Ao comentar com eles sobre a abertura do compasso, dissemos que, a partir daquele momento, iríamos usar outro termo para

[8] Mostramos aos alunos como Euclides determinou o círculo “com todo centro e distância, descrever um círculo” (Postulado 3, BICUDO, 2009, p. 98).
[9] E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

nos referir a essa abertura, e uma aluna, que não foi identificada, mencionou a palavra raio.

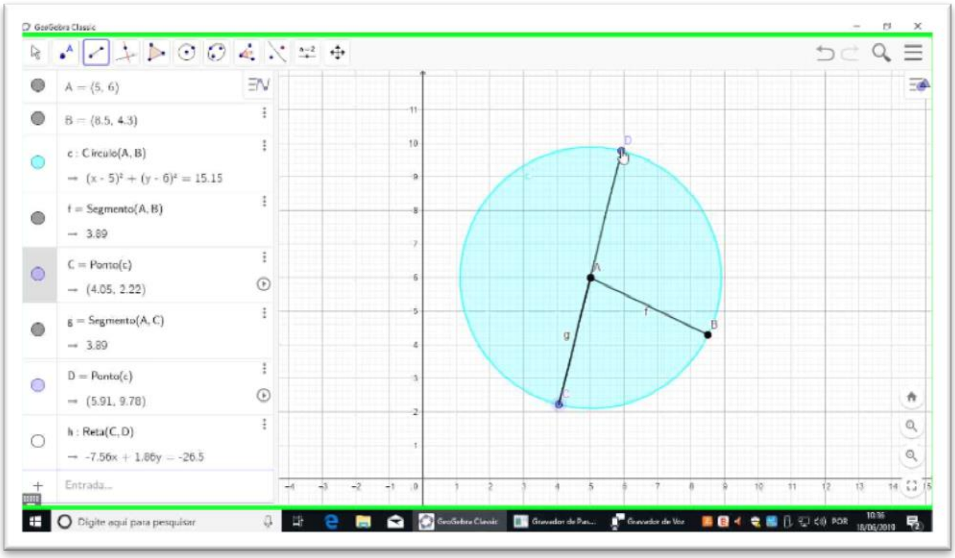
Prof. Thais: Vocês acham que é possível construir outros raios aqui?
Alguns alunos: Sim!
Prof. Thais: Então, façam a construção de mais alguns raio aí!
Alice (D12): É pegar o segmento e colocar do centro até a borda.
Mari (D10): Não dá! Não dá não!
João (D6): Dá! Dá! Professora, olha aqui!
Melissa (D12): Ah! Dá sim!
(houve uma interrupção desse momento, pois a turma recebeu um recado da supervisora através de um colega)
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 18/06/2019).

Ressaltamos que várias duplas solicitavam que suas construções fossem verificadas. O equipamento de Datashow estava ligado e mostrávamos algumas imagens, no entanto, não queríamos influenciá-los a realizar construções idênticas às visualizadas na tela e, portanto, mostrávamos a figura de um círculo com o raio, por exemplo, apenas após esperar que ao menos tentassem construí-los sozinhos. Dessa forma, esse recurso tecnológico foi um suporte para o desenvolvimento das tarefas. É por essa razão que esse tipo de trabalho demanda mais tempo e o professor se movimenta mais pela sala para atender as inúmeras solicitações dos alunos, seja para mostrar e/ou confirmar se a construção estava correta, ou para expressar dificuldades quanto ao uso do computador ou das ferramentas do *software*.

Esse tipo de trabalho demanda mais tempo e o professor se movimenta mais pela sala para atender as inúmeras solicitações dos alunos, seja para mostrar e/ou confirmar se a construção estava correta, ou para expressar dificuldades quanto ao uso do computador ou das ferramentas do *software*.

Nesse momento, também mostramos a diferença entre círculo e circunferência. Para isso, usamos as configurações de objeto do *software* para alterar as cores, de modo que percebessem a definição de Euclides sobre o círculo: “uma figura plana contida por uma linha que é chamada de circunferência [...]” (definição 15, BICUDO, 2009, p. 97). A figura 11 é uma captura da primeira construção no GeoGebra nessa tarefa.

Figura 11 - Construção de um círculo pela dupla D15.



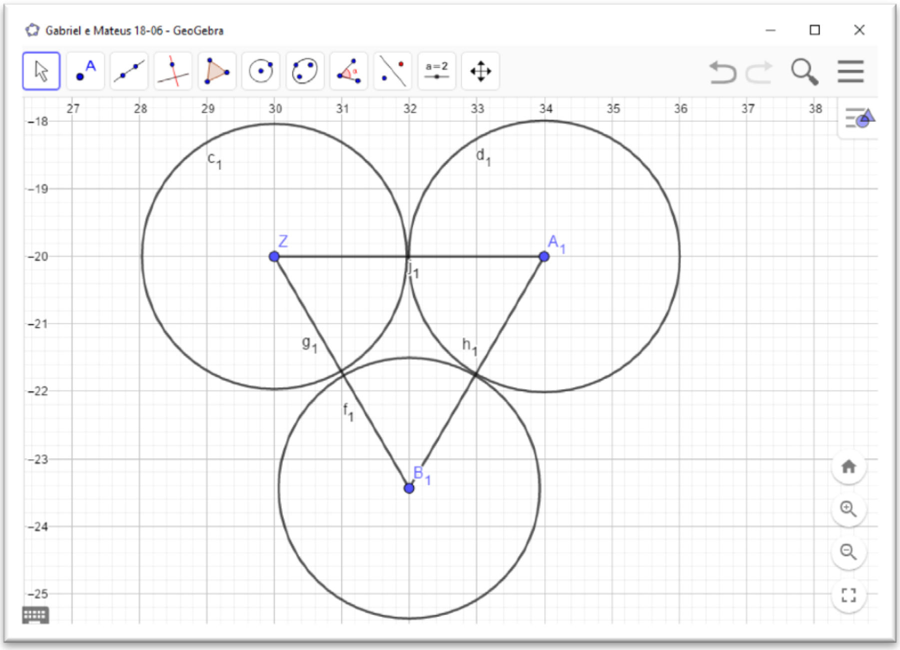
Fonte: Dados da pesquisa (imagem obtida por meio do Gravador de Passos do Windows).

Como mencionado anteriormente, procurávamos associar cada objeto geométrico inserido nessa construção com as definições e postulado de os “Elementos”. Em relação ao diâmetro, também mostramos aos alunos como Euclides o definiu em sua obra: “é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência dos círculos, e que corta o círculo em dois” (BICUDO, 2009, p. 98). Assim como as outras definições, essa também foi colada na parede, para que os alunos a visualizassem ao longo do trabalho. Em seguida, a partir da construção da figura 11, perguntamos aos alunos qual é a relação entre o raio e o diâmetro.

Davi (D14): É porque o raio é a medida do ponto, por exemplo, do ponto D ao ponto B, e outro é... passando pelo meio.
Tales (T8): O raio fica só pela metade.
Tadeu (T8): O raio é a metade.
Professora: É a metade de quê?
Duda (D12): Do diâmetro!
Professora: Muito bem! E qual é então a medida do diâmetro?
Lara (D5): Dois raios.
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 18/06/2019).

Para finalizar, dissemos aos alunos que Euclides construiu várias figuras a partir dos raios de circunferências, e propusemos a eles que construíssem figuras geométricas com raios. Nosso intuito era aproximá-los das construções de Euclides que seriam trabalhadas nas próximas tarefas. A figura 12 mostra um desenho construído pelas alunas Bia e Bruna (D2).

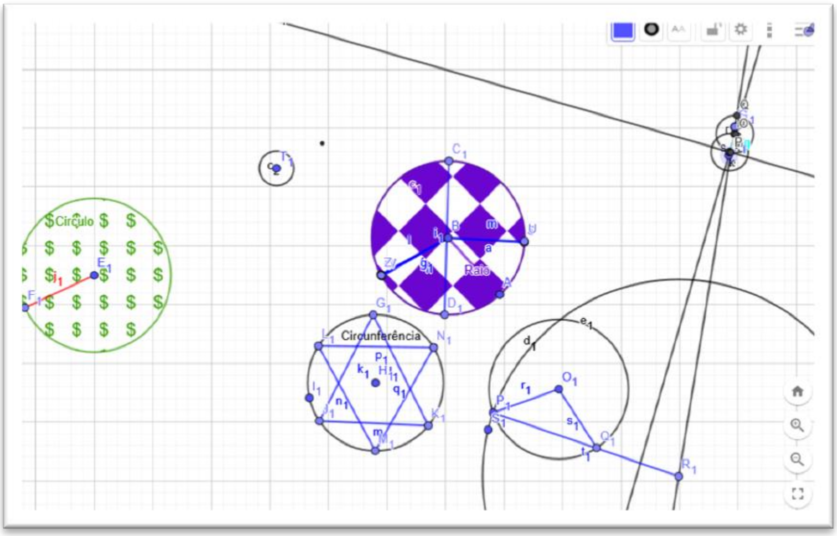
Figura 12 - Construção de figuras geométricas utilizando raios (D2)



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta figura, as alunas construíram um triângulo a partir de circunferências e tentaram fazer com que seus lados fossem apenas raios. A dupla se aproximou muito da proposta, porém, ao aumentar a figura na janela de visualização, observamos que não houve interseção entre as circunferências e isso foi discutido com elas. Entretanto, foi a única dupla que chegou a utilizar mais de duas circunferências para construir polígonos, pois as demais duplas ou utilizaram apenas uma circunferência, e nela construíram desenhos, ou fizeram desenhos geométricos padronizados com muitas circunferências, esquecendo-se dos raios. Por exemplo, Lívia e Lúcia (D9) construíram vários círculos e traçaram neles alguns segmentos como raios e cordas.

Figura 13 - Construções da dupla D9



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa dupla usou a mesma janela de visualização durante toda a tarefa, as outras duplas geralmente criavam um novo arquivo para cada etapa da tarefa 4. Podemos perceber também que Lívia e Lúcia encontraram outras funções e exploraram (ou brincaram) mais uma parte artística do software.

Esperávamos que alguns alunos pudessem se lembrar da construção do quadrado, pois utilizamos o raio da circunferência para finalizar essa construção (ver figura 9). Entretanto, os alunos tiveram poucos minutos para realizar essa parte da tarefa, e as interferências externas, nesse dia, podem ter interferido nos resultados.

Além disso, o círculo, a circunferência, raio e diâmetro foram as figuras geométricas mencionadas frequentemente durante essa tarefa, sendo enfatizada sua importância no trabalho de Euclides e para a civilização chinesa. Talvez esses sejam alguns dos motivos de as duplas não mencionarem sobre o lado do quadrado.

A tarefa 4 foi desenvolvida com muitas situações que geralmente são comuns em uma escola. Como nossa pesquisa de campo foi desenvolvida durante o horário normal de aula e com toda a classe presente, tivemos que lidar com inúmeras situações. Entretanto, nosso objetivo principal foi abordar os círculos e as circunferências, além de raio e diâmetro, pois essas figuras estariam nas construções dos triângulos, durante as próximas tarefas.

A partir da análise dos resultados percebemos que seria necessária uma reformulação da tarefa. Uma sugestão: contextualizar mais sobre a Matemática na cultura chinesa propondo construções que relacione essa cultura com as definições de Euclides.

TAREFA 5 – CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO ISÓSCELES E A EXPLORAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 3 DO LIVRO I

Objetivos: Construir o triângulo isósceles e a explorar da proposição 3 do Livro I de "Elementos".
Duração estimada: Duas aulas de 40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de Informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e software GeoGebra.

Após os alunos conhecerem algumas ferramentas do GeoGebra na tarefa anterior, em especial, o "Compasso", propusemos a construção de triângulos e a exploração de algumas de suas propriedades. A partir dessa tarefa[10] começamos a estimular os alunos a explorarem alternativas de construção. Para isso, fizemos algumas perguntas para que pudessem registrar como haviam realizado uma construção e o porquê. Ao longo do trabalho no laboratório, mantivemos pequenos cartazes com as "ideias de Euclides" (definições do Livro I de os "Elementos") colados na parede da sala desde a tarefa 3.

Iniciamos com a apresentação de um breve vídeo[11] que aborda o interesse dos povos antigos pelo triângulo. Ao assistir às gravações desse momento, observamos duplas que pareciam atentas ao vídeo, e outras que conversavam entre si, aparentemente, não se interessando pelo mesmo.

Após o término do vídeo, comentamos que uma forma geométrica tão importante para vários povos antigos não poderia faltar na obra de Euclides. Assim, vários tipos de triângulos foram colados na parede (figura 14), para que pudéssemos analisar suas características.

---

[10] Ver texto orientador da página 80.

[11] Utilizamos alguns trechos do vídeo disponível em https://youtu.be/dsjiWChrjE4. O vídeo teve duração de 4min40s. Em síntese, mostra a confecção dos papiros – algo que chamou a atenção dos alunos, pois na tarefa 1 o papiro havia sido mencionado – e apresenta os primeiros registros com estudos sobre os triângulos, encerrando com uma breve menção a Tales de Mileto sobre a medição da altura das pirâmides, usando relações existentes entre tais figuras.

Figura 14 - Triângulos fixados na parede

Fonte: Dados da pesquisa.

Esse é um momento para reforçar sobre as características dos triângulos e/ou verificar o que os seus alunos sabem sobre eles. É muito importante utilizar vários tipos de triângulos .

Antes de colar os triângulos no quadro, comentamos que gostaríamos que mencionassem o que sabiam sobre algumas figuras. Quando afixamos as primeiras figuras, uma pequena discussão foi iniciada:

Dara (D12): Olha um triângulo... outro triângulo.
Davi (D14): Um triângulo isósceles... um triângulo perpendicular.
Leo (D3): Um triângulo retângulo!
Algumas duplas ao mesmo tempo: São triângulos.
Dara (D12): É tudo triângulo, só que as vezes ele é achatado.
Davi (D14): São triângulos diferentes.
Diego (D14): De tamanhos diferentes.
Prof. Thais: Então são todos triângulos?
Davi (D14): É.
Prof. Thais: Vocês têm certeza?
Algumas duplas ao mesmo tempo: Sim!
Prof. Thais: Muito bem! É isso mesmo! Vocês sabiam que quando as crianças estão começando a aprender sobre figuras geométricas elas acham que só existe um tipo de triângulo e quando visualizam esses triângulos aqui (apontando para triângulos com um dos ângulos muito pequenos ou muito grandes) não o reconhecem como triângulos? E o que uma figura precisa ter para ser um triângulo?
Davi (D14): Três lados iguais.
Leo (D3): (completando a frase do colega anterior) Iguais.
Prof. Thais: Sempre iguais?
Algumas duplas ao mesmo tempo: Não.
Prof. Thais: E o que mais? (depois de um tempo de respostas) a figura precisa ter três ângulos também.
Leo (D3): Claro!
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 25/06/2019).

Esse momento nos permitiu conhecer um pouco sobre o que as duplas sabiam dos triângulos. Na parede, colamos vários tipos de triângulos (ver figura 43). Observamos menções a dois tipos de classificação dos triângulos: quanto aos lados, quando Davi (D14) menciona que viu um triângulo isósceles; e quanto aos ângulos, quando Leo (D3) disse que um dos triângulos era retângulo. Analisando os vídeos, observamos que quando Davi menciona que também havia um "triângulo perpendicular", imediatamente Leo menciona o termo "triângulo retângulo". Talvez a fala anterior do colega tenha feito com que se lembrasse que o triângulo retângulo tem esse nome por possuir um ângulo reto e retas perpendiculares formam ângulos retos, ou, ainda, isso esteja relacionado aos seus conhecimentos adquiridos em anos anteriores. Não houve comentários sobre os triângulos mais "achatados". Instantes depois, ao apontar para um deles e perguntar se aquela figura era realmente um triângulo, alguns alunos confirmaram e enfatizaram: "todos são triângulos!".

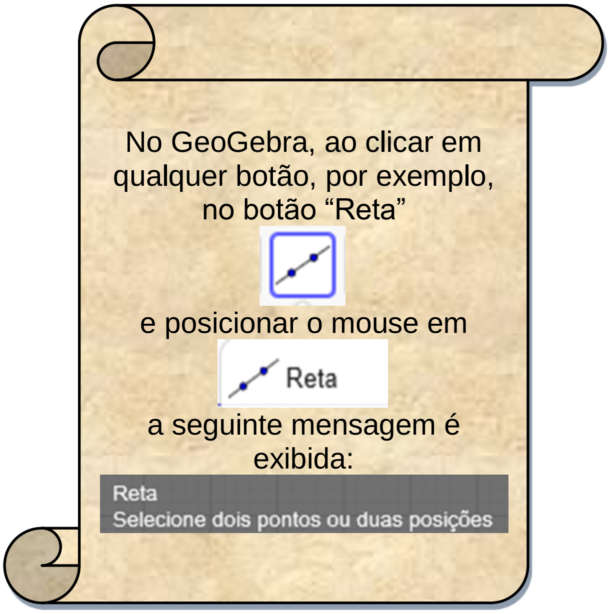
Em seguida, dissemos aos alunos que nessa tarefa aprenderíamos a construir um triângulo isósceles. Perguntamos às duplas se saberiam dizer o que era um triângulo isósceles. Os alunos não responderam imediatamente, percebemos alguns com receio de falar, outros estavam realizando algumas construções no GeoGebra. Após insistir um pouco, alguns responderam:

Dara (D12): É um triângulo que tem os lados diferentes um do outro
Duda (D12): É aquele que parece um chapeuzinho de festa né não?
Prof. Thais: Qual desses aqui você acha que parece com ele? (apontando para os triângulos na parede)
Duda (D12): É aquele ali.
Prof. Thais: Então, quais são as características de um triângulo isósceles? O que vocês observam?
Dara (D12): Três lados iguais, não é não?
Dura (D12): Não é não.
Naty (D15): Tem três pontos.
Tales (T8): Tem dois lados iguais.
Tadeu (T8): Tem dois ângulos iguais.
Davi (D14): Aqui professora nós fizemos um triângulo. (no GeoGebra utilizando apenas segmentos)

(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 25/06/2019).

Em seguida, com o auxílio de um DataShow, iniciamos a construção do triângulo isósceles no GeoGebra, destacando alguns momentos. Por exemplo, inicialmente, pedimos que construíssem dois segmentos de tamanhos diferentes e, para isso, exibimos uma tela com exemplos de dois segmentos. Após cada momento da construção, perguntamos aos alunos que definições (o termo usado com os alunos foi “ideias”[12]) de Euclides estavam relacionadas às figuras geométricas. Os alunos apontaram para as definições de ponto, superfície e círculo que estavam coladas na parede.

Ao utilizar uma ferramenta no GeoGebra, é preciso compreender as propriedades do objeto geométrico para construir a figura desejada, apesar de o *software* informar como usar a ferramenta. Observamos que após selecionar a ferramenta necessária, algumas duplas apresentavam dificuldades e solicitavam auxílio para realizar a construção na janela de visualização.



Se tivéssemos realizado a construção do triângulo isósceles junto com os alunos (mostrando a imagem pelo DataShow), talvez tivessem realizado a construção de forma mais rápida, pois foi um momento da tarefa que durou cerca de 35 minutos. Porém, perderíamos a oportunidade de as duplas descobrirem sozinhas o funcionamento e as propriedades intrínsecas de cada ferramenta, além de aprender por elas mesmas. Dessa forma, queríamos possibilitar um “trabalho pedagógico no sentido da conquista da autonomia intelectual” (MIGUEL; MIORIM, 2008, p. 62). Sendo assim, os *softwares* de Geometria dinâmica, como o GeoGebra,

[12] Discuta brevemente por que usar um termo mais simples.

são bons aliados nesse processo. Esses *softwares* se diferenciam do lápis e do papel não só pela possibilidade de manipular objetos geométricos, mas pelo potencial de promover um ambiente no qual podem surgir várias formas de pensar (GRAVINA, 2001). O GeoGebra é, então, um caminho para descobertas, mas, para promover um ambiente de descobertas, os estudantes precisam se aproximar do processo de criação da Matemática, ou seja, precisam ter características do "pensar matemático" (GRAVINA, 2001). Lingefjard (2011) considera que esses *softwares* possibilitam, através da visualização e manipulação de figuras, a exploração e a verificação de conjecturas. Portanto, é necessário que os alunos tenham tempo, espaço e, principalmente, autonomia para utilizá-los.

Diante disso, desde o início do estudo, nossa intenção era fugir de um passo a passo de construção a ser seguido, pois queríamos que os alunos pudessem desenvolver uma autonomia quanto às construções e na busca por conhecimento. Mesmo assim, nesse momento, alguns caminhos foram mostrados aos alunos, pois era a primeira construção na qual a ferramenta "Compasso" seria utilizada como um transporte de segmento[13].

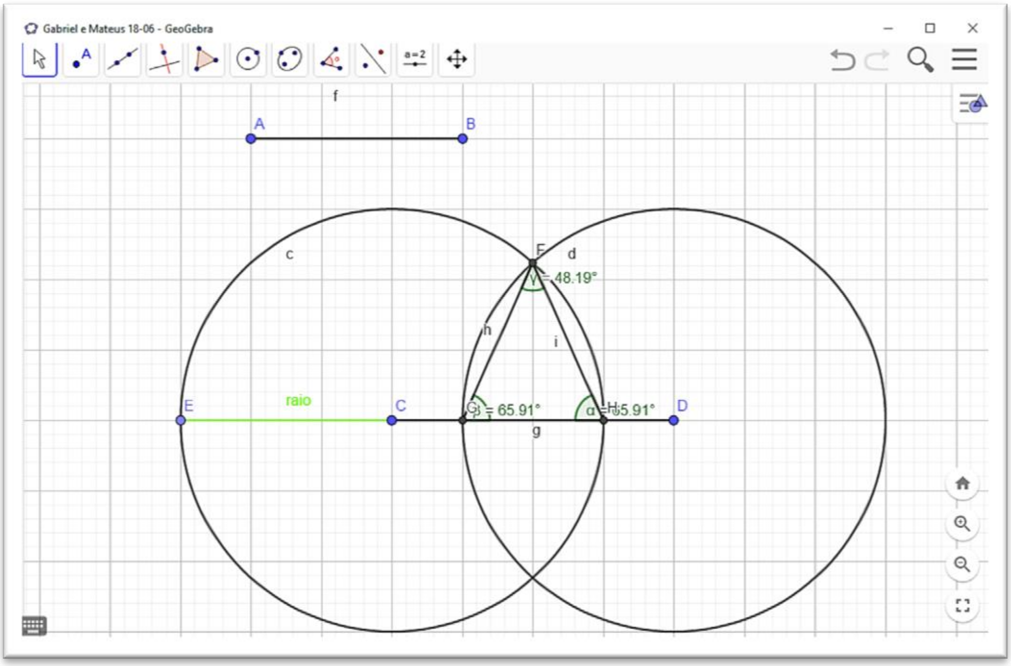
> Acreditamos que, para que os alunos chegassem a uma construção geométrica de forma autônoma, precisariam de um "ponto de partida", um apoio, para que não ficassem perdidos, sem saber como começar, pois essa seria a primeira construção de um triângulo no *software*.

Esse processo foi muito importante para que as duplas, nas próximas tarefas, pudessem estar mais familiarizadas com as ferramentas do GeoGebra e suas particularidades geométricas. Por exemplo, a figura 15 apresenta a construção final do triângulo isósceles pelos alunos João e Joaquim (D6). Na figura, os alunos utilizaram as ferramentas "Segmento", "Compasso" e "Ponto", para a construção do

[13] Na tarefa 2, trabalhamos o transporte de segmento, quando os grupos deveriam construir quadrados congruentes, utilizando uma régua não graduada e um compasso.

triângulo isósceles, e a ferramenta “Ângulo”[14], para destacar as medidas dos ângulos.

Figura 15 - Construção do triângulo isósceles pela dupla D6



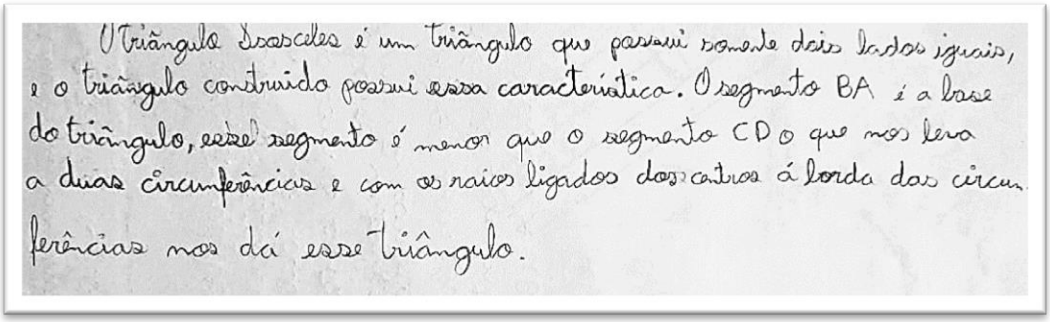
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, por algum motivo, os alunos destacaram o raio da circunferência na figura. Além de construir o triângulo, nossa intenção era levar as duplas a compreenderem que seus lados eram raios e que os lados iguais do triângulo isósceles teriam a mesma medida, já que eram raios de circunferências iguais. Dessa forma, após a construção do triângulo isósceles, solicitamos aos alunos que explicassem por que sua construção final gerou esse tipo de triângulo. As respostas, em sua maioria, foram de justificativas relacionadas às ferramentas e aos passos utilizados, apenas uma dupla mencionou a palavra “raio” como sendo o lado dessa figura (figura 16). Entretanto, essa foi a primeira oportunidade de escreverem uma justificativa sobre a construção, e muitas duplas fizeram justificativas mais longas do que era previsto.

---

[14] A ferramenta “Ângulo” foi descoberta por algumas duplas durante a construção do triângulo, pois em nenhum momento da aula mencionamos sobre ela (fizemos isso na tarefa 6).

Figura 16 - Justificativa das alunas Lívia e Lúcia (D9)



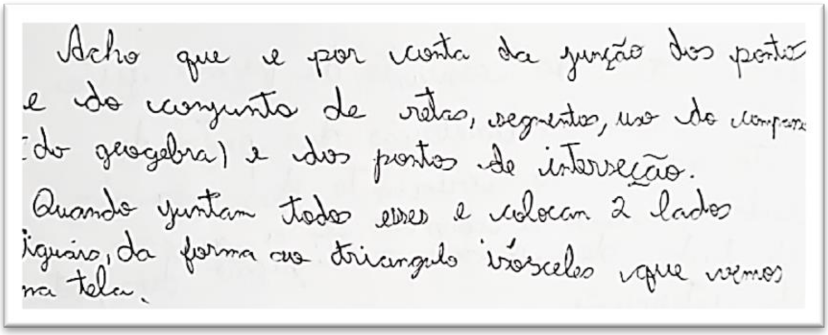
O triângulo Isosceles é um triângulo que possui somente dois lados iguais, e o triângulo construido possui essa caracteristica. O segmento BA é a base do triângulo, esse segmento é menor que o segmento CD o que nos leva a duas circunferências e com os raios ligados dos centros á borda das circunferências nos dá esse triângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Lívia e Lúcia utilizaram alguns conceitos matemáticos para justificar a construção do triângulo isósceles. Esperávamos que as duplas utilizassem termos matemáticos até então estudados, principalmente o termo "raio", que seria o responsável por criar os lados das figuras geométricas. Com isso, podemos perceber que a dupla mencionou termos como "segmento BA", "base do triângulo" e "raios", que são indícios de que realizaram conjecturas, baseadas nas construções, para justificar a sua construção.

Por outro lado, conforme mencionado nos parágrafos anteriores, a maioria das duplas justificou a construção a partir das ferramentas utilizadas no GeoGebra. Na figura 17, temos o registro das alunas Lara e Luna (D5), que achavam ter chegado à construção do triângulo isósceles por causa do conjunto de ferramentas que utilizaram.

Figura 17 - Justificativa das alunas Lara e Luna (D5)



Acho que e por conta da junção dos pontos e do conjunto de retas, segmentos, uso do compasso (do geogebra) e dos pontos de intersecção.
Quando juntam todos esses e colocam 2 lados iguais, da forma ao triangulo isósceles que vemos na tela.

Fonte: Dados da pesquisa.

Outras duplas, como Bia e Bruna (D2), utilizaram como justificativa o fato de terem utilizado as ferramentas para gerar figuras que formassem um triângulo, além disso, mencionaram mais elementos de um triângulo ao registrarem, por exemplo: “com dois lados iguais”, “3 vértices” e “ângulos”. Já os alunos Davi e Diego (D14), que utilizaram a ferramenta ângulo para destacar os ângulos (assim como a dupla D6, figura 16), usaram o termo “porque medimos o ângulo e deu dois lados iguais” para justificar a construção do triângulo isósceles.

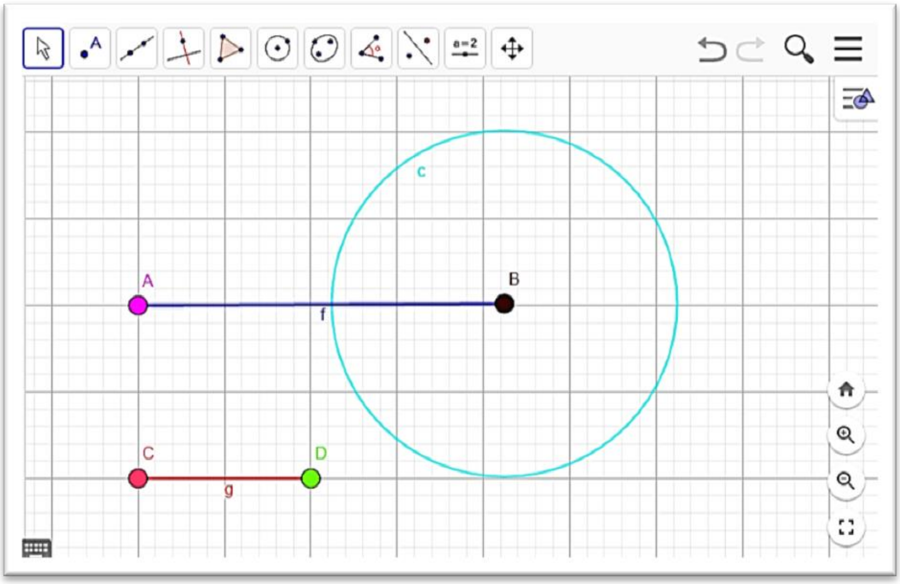
Acreditamos que o uso da ferramenta “Ângulo”, nesse momento, influenciou a resposta dos alunos, porém, foi uma ferramenta “descoberta” por alguns alunos, ao explorar o *software*, numa ação que consideramos importante e positiva, pois queríamos que, cada vez mais, tivessem a autonomia de exploração tanto do aspecto técnico do computador e do GeoGebra, quanto do aspecto conceitual de figuras geométricas.

Nesse momento da tarefa, exploramos apenas algumas definições da obra “Elementos”. Entretanto, essa construção foi o ponto de partida para chegar à primeira proposição do Livro I de os “Elementos”, proposta na tarefa 6, pois queríamos que os alunos desenvolvessem mais algumas habilidades com as ferramentas “Compasso”e “Reta”, e que pudessem compreender como os raios das circunferências seriam utilizados na construção de figuras geométricas, para que, sozinhos, pudessem chegar à construção do triângulo da proposição I (o triângulo equilátero).

Ao longo da tarefa 5, exploramos também a proposição 3 do Livro I: “dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual à menor”. (BICUDO, 2009, p. 100). A proposição 3, apesar de não estar diretamente relacionada aos triângulos, foi utilizada na tarefa para explorar o transporte de segmento.

Com essa proposição, nossa intenção era reforçar o trabalho com o transporte de segmento, utilizando a ferramenta "Compasso", e promover maior autonomia por parte dos alunos em relação ao *software*. Solicitamos que os alunos, sozinhos, construíssem dois segmentos e que destacassem, do maior deles, um outro segmento igual ao menor. Inicialmente, eles apresentaram dúvidas quanto à tarefa e foi necessário explicar com mais detalhes a nossa proposta de construção. A seguir, apresentamos a construção da dupla D17.

Figura 18 - Construção da proposição 3 pela dupla D17

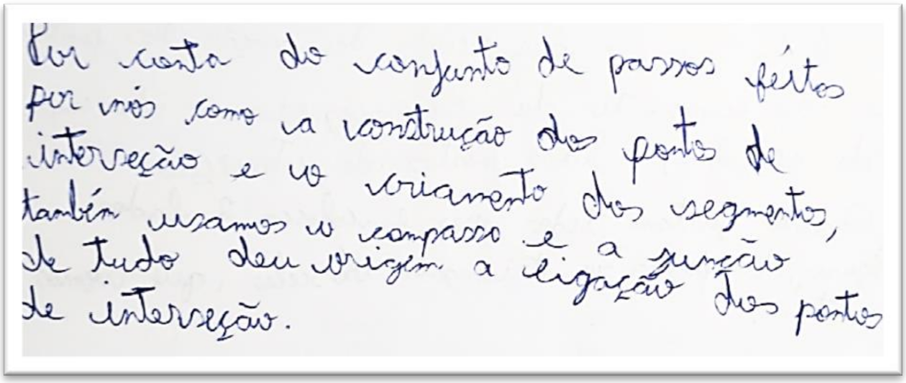


Fonte: Dados da pesquisa.

Quando propusemos aos alunos que, a partir de dois segmentos (um maior que o outro), destacassem no segmento maior um segmento igual ao menor, queríamos que as duplas, sozinhas, realizassem a construção a partir de tentativas e utilizando os segmentos e a ferramenta "Compasso". Em geral, a maioria das duplas conseguiu concluir essa tarefa, algumas sem auxílio, enquanto outras solicitaram ajuda. Na figura 18, Camila e Cássia (D17) construíram os segmentos AB e CD menor que AB, e realizaram a construção corretamente. Contudo, deixaram de evidenciar com uma outra cor o que correspondia ao segmento CD em AB.

Após a construção, pedimos às duplas que explicassem como fizeram o processo e por que chegaram a essa construção. Além disso, pedimos que colassem as definições de Euclides que, para eles, estavam presentes na construção[15]. As alunas Lara e Luna (D5) ainda explicaram a construção da figura pelo conjunto de ferramentas (ou passos) necessário para a execução da tarefa (figura 19).

Figura 19 - Justificativa das alunas Lara e Luna (D5)

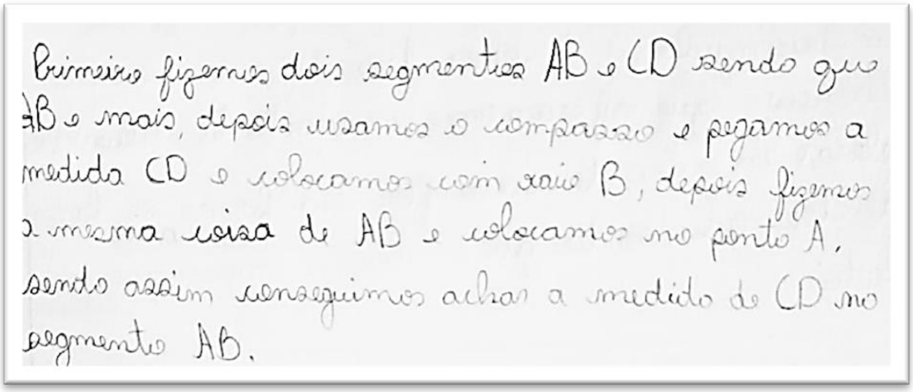

Por conta do conjunto de passos feitos
por nós como a construção dos ponto de
interseção e o criamento dos segmentos,
também usamos o compasso e a junção
de tudo deu origem a ligação dos pontos
de interseção.

Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria das duplas conseguiu realizar a construção da proposição 3 no GeoGebra. Entretanto, muitos deixaram de mencionar, ou mencionaram pouco, elementos geométricos como raios, segmentos, dentre outros, nas suas justificativas. Por exemplo, as alunas Dara e Duda (D12) apresentaram mais elementos em suas justificativas (figura 20).

[15] Todas as duplas receberam um conjunto de etiquetas com todas as definições de Euclides visualizadas desde o início das tarefas. Essas etiquetas, quando solicitadas, eram coladas em alguma região abaixo dos seus registros.

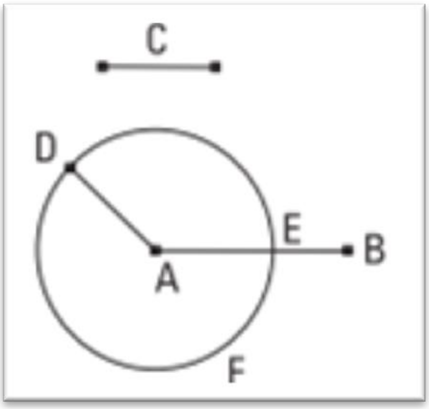
Figura 20 - Justificativa das alunas Dara e Duda (D12)[16]


Primeiro fizemos dois segmentos AB e CD sendo que AB e mais, depois usamos o compasso e pegamos a medida CD e colocamos com raio B, depois fizemos a mesma coisa de AB e colocamos no ponto A, sendo assim conseguimos achar a medido de CD no segmento AB.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na proposição 3 do livro I de “Elementos”, Euclides escreve como se deve iniciar a construção, apresentando: “sejam as duas retas desiguais dadas AB, C, das quais seja maior a AB; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual à menor C” (BICUDO, 2009, p. 100); e continua a especificar sobre a construção, ao escrever que: “fique posta no ponto A a AD igual à C; e, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AD, fique descrito o círculo DEF” (BICUDO, 2009, p. 100). A figura 21 apresenta o desenho dessa construção

Figura 21 - Figura da proposição 3 do livro I de "Elementos"



Fonte: Dados da pesquisa.

[16] “Primeiro fizemos dois segmentos AB e CD sendo que AB maior, depois usamos o compasso e pegamos CD e colocamos com raio B, depois fizemos a mesma coisa de AB e colocamos no ponto A. Sendo assim conseguimos achar a medida de CD no segmento AB”.

Ressaltamos que não apresentamos a figura 21 para os alunos, pois poderia confundi-los, já que em suas construções as duas circunferências ficavam evidentes. A construção correta da proposição 3 não resultava em um registro com todos os elementos. Esperávamos, portanto, que os alunos pudessem registrar suas justificativas com elementos semelhantes a esses, mas as alunas Dara e Duda (12), assim como as duplas D2 e D9, escreveram algo próximo disso.

Para finalizar a tarefa 5, mostramos aos alunos como o início da proposição 3 de “Elementos” foi escrita por Euclides: “Sejam duas retas desiguais dadas AB e CD, da qual AB é maior; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual a menor.” (BICUDO, 2009, p. 100)[17]. Além disso, dissemos aos alunos que eles tinham se aproximado de um conhecimento que Euclides registrou em sua obra “Elementos” há mais de dois mil anos.

Como, além das construções, as duplas eles deveriam realizar as justificativas solicitadas, esse processo demandou tempo e dedicação por parte dos alunos.

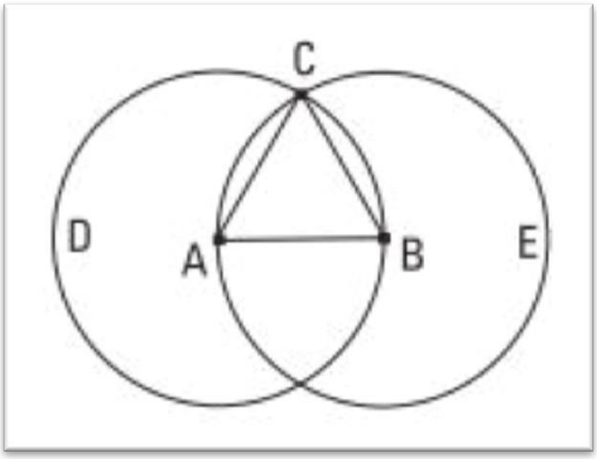
[17] Houve uma pequena modificação da frase para ser apresentada aos alunos. Frase original: “Sejam duas retas desiguais dadas AB, C, das quais seja maior a AB; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual à menor [...]”.

TAREFA 6 – A PROPOSIÇÃO 1 DO LIVRO I: CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Objetivo: Construir o triângulo equilátero a partir da proposição 1 do livro de Euclides.
Duração estimada: Duas aulas de 40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de Informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e software GeoGebra.

Na tarefa 6[18] propusemos a construção da proposição 1[19] do Livro I de Euclides – "Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada (BICUDO, 2009, p. 99)[20] – utilizando a ferramenta "Compasso" do GeoGebra (figura 22).

Figura 22 - Proposição 1. Construir um triângulo equilátero



Fonte: Extraído de Livro 1 de Bicudo (2009, p.99).

[18] Ver texto orientador da página 82.
[19] Proposição 1: Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada (BICUDO, 2009, p. 99).
[20] Essa proposição foi apresentada aos alunos exatamente com essa linguagem.

Na figura acima, é possível verificar que os lados do triângulo equilátero são raios das circunferências D ou E, ou ainda, de ambas. Euclides, em seu livro I, utiliza essa construção para demonstrar o triângulo equilátero. Ele apresenta como deve ser realizada a construção e, em seguida, utiliza-se de argumentos extraídos dela para provar a proposição:

> E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas CA foi também provada igual a AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto as três CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB. (BICUDO, 2009, p. 99)

O trecho acima, retirado da obra “Elementos”, mostra uma prova para a congruência dos lados do triângulo equilátero. Nosso propósito era levar os alunos a chegarem próximo, de alguma maneira, dos argumentos que comprovem propriedades do triângulo equilátero, a partir da construção com a ferramenta “Compasso” no GeoGebra. Acreditamos que esse seja um caminho propício para descobertas de propriedades geométricas dos triângulos, e pretendíamos fazer com que as duplas chegassem sozinhas, sem nenhuma intervenção, à construção do triângulo equilátero.

Com a construção do triângulo isósceles aberta no GeoGebra (realizada na aula anterior), solicitamos que as duplas utilizassem duas ferramentas: a ferramenta “Ângulo”, para medir os três ângulos do triângulo, e a ferramenta “Distância, Comprimento ou Perímetro”, para visualizar as medidas dos lados do triângulo. Esse momento permitiu que as duplas conhecessem mais ferramentas do GeoGebra, enquanto realizavam a atividade, já que nossa proposta, desde o início, era não fornecer um passo a passo de utilização do *software*, e sim, permitir descobertas e também possibilitar a compreensão por tentativas e erros.

Após a identificação das medidas dos ângulos na sua construção, solicitamos que as duplas registrassem o que haviam observado. A figura 23 apresenta um registro da dupla D12.

Figura 23 - Registro 1 da dupla D12

No desenho eu vejo que eles tem dois lados iguais, ele não
possui ângulos de 90º; Os lados iguais possuem 8 , e
a base 4 e os angulos iguais sao 75.52º

Fonte: Dados da pesquisa.

Dara e Duda (D12) registraram os valores encontrados na sua construção, mas ressaltaram uma informação importante: que o triângulo construído não possuía ângulos de 90º. Acreditamos que o momento inicial da tarefa 5, onde apresentamos vários triângulos para eles, inclusive o triângulo retângulo, impactou o registro da dupla.

Na construção do triângulo isósceles, as duplas construíram um segmento CD como medida dos lados iguais do triângulo, e um segmento AB que seria a base desse triângulo. Com isso, o segmento CD é apenas uma referência nessa construção (Ver texto orientador da tarefa 7). Solicitamos às duplas que movimentassem um dos pontos do segmento CD, para que visualizassem diferentes medidas de lados e ângulos do triângulo isósceles.

> *Alice (D16): É quando eu vou aumentando esse U, V, aqui... vão mudando?*
> *Prof. Thais: Sim! Anotem para mim.*
> *Alice (D16): Espera aí, eu tenho que ver se funciona mesmo!*
> *Prof. Thais: Ok!*
> *Alice (D16): Olha! Que tecnologia...*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

Nesse trecho, Alice fala sobre os pontos U e V, esses pontos correspondem aos pontos C e D solicitados por nós no início da tarefa. Esse fato fornece indícios de que a dupla estava familiarizada com as nomenclaturas das figuras geométricas, pois não apresentaram dificuldades ao identificar o segmento CD na sua construção.

O trecho anterior representa o momento inicial da tarefa, em que a dupla (D16) parece experimentar, pela primeira vez, a manipulação de um figura construída. Na verdade, essa foi a primeira vez que de fato solicitamos aos alunos que realizassem esse movimento. A manipulação desse triângulo permitiu estudar e explorar suas propriedades. Essa exploração ocorreu a partir da adição de alguns elementos do triângulo (ângulos e medidas dos lados), além de sua movimentação, com o intuito de trabalhar com as proposições 5 (apenas o seu início) e 6 do Livro 1 da obra "Elementos".

> Proposição 5: Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si [...].
> Proposição 6: Caso dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, os lados que se estendem sob os ângulos iguais também serão iguais entre si (BICUDO, 2009, p. 102-103).

A partir da movimentação do segmento CD, as duplas destacaram as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo, e registraram algumas observações sobre o triângulo isósceles construído (figura 24).

Figura 24 - Registro 2 da dupla D16

Medida dos ângulos iguais	Medida dos lados iguais	Medida da base
75,35°	6	3.03
76,21°	7,41	3.53
63,43°	3.95	3.53
78.65	8.98	3.53
83.82	16.41	3.53

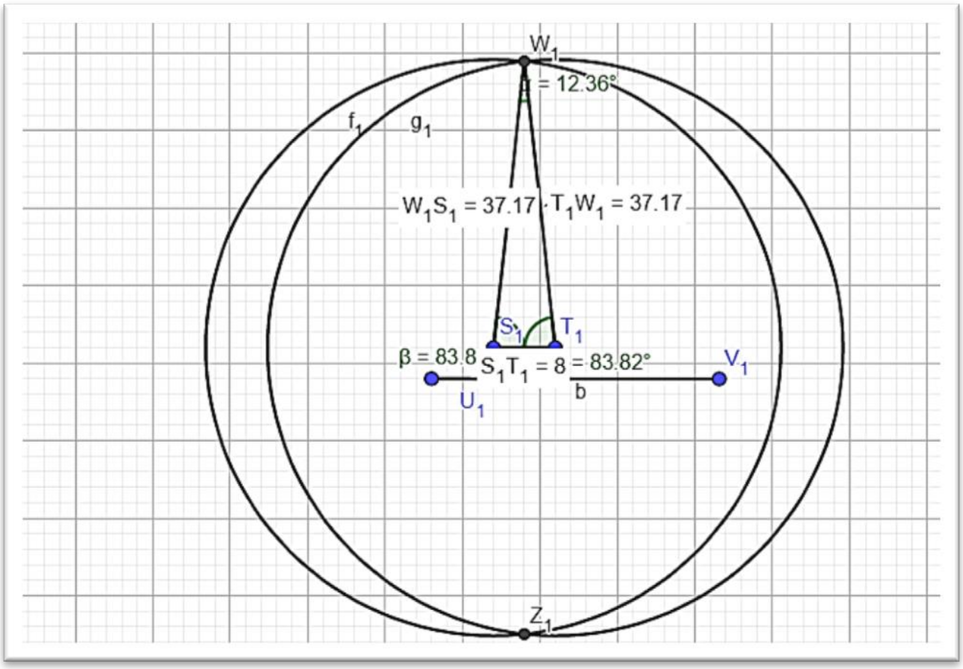
Fonte: Dados da pesquisa.

A cada movimento do segmento CD, as duplas registravam as medidas dos ângulos e dos lados. O breve diálogo abaixo representa o momento do registro da dupla:

> *Alice (D16): Os ângulos iguais, 75,35º.. As medidas do lados iguais, 6, mas esse aqui não mudou, ficou o mesmo, olha aqui...*
> *Aline (D16): Esse?*
> *Alice (D16): É, ficou o mesmo que estava antes.*
> (Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

Com os áudios e registro em diário de campo, verificamos que as duplas perceberam que, ao movimentar o segmento CD, a medida da base não se alterava, entretanto, essas medidas, registradas na figura 24, não correspondem à construção realizada pela dupla (figura 25), cuja base é igual a 8.

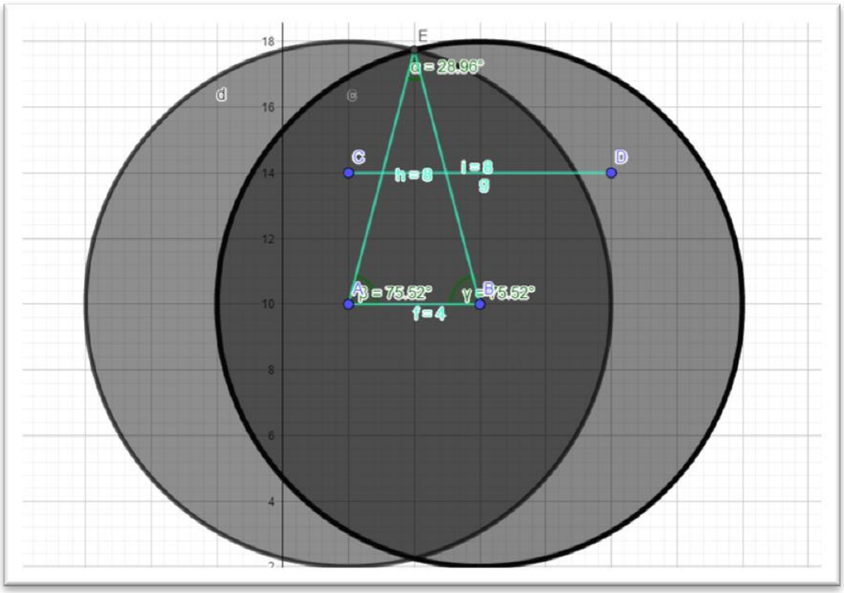
Figura 25 - Construção do triângulo isósceles no GeoGebra da dupla D16



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla D12 realizou a construção abaixo (figura 26), inserindo também as informações de medidas de ângulos e lados, conforme solicitado.

Figura 26 - Construção do triângulo isósceles no GeoGebra da dupla D12



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao movimentar um dos pontos do segmento CD e preencher o quadro com as medidas dos ângulos e lados, a dupla D12 registrou corretamente as informações (figura 27).

Figura 27 - Registro 2 da dupla D12

Medida dos ângulos iguais	Medida dos lados iguais	Medida da base
45°	2.83	4
79.82°	11.37	4
67.91°	5.37	4
75.57°	8	4
70.07°	5.85	4

Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida, pretendíamos que os alunos registrassem suas observações sobre esses valores, então solicitamos às duplas que respondessem a pergunta: o que acontece em todos os casos quando construo um triângulo sabendo que dois dos seus lados terão a mesma medida?

Das duplas, sete apresentaram justificativas coerentes; oito se aproximaram, mas faltaram mais elementos para completar a resposta; uma dupla movimentou o segmento da base, e duas duplas não responderam.

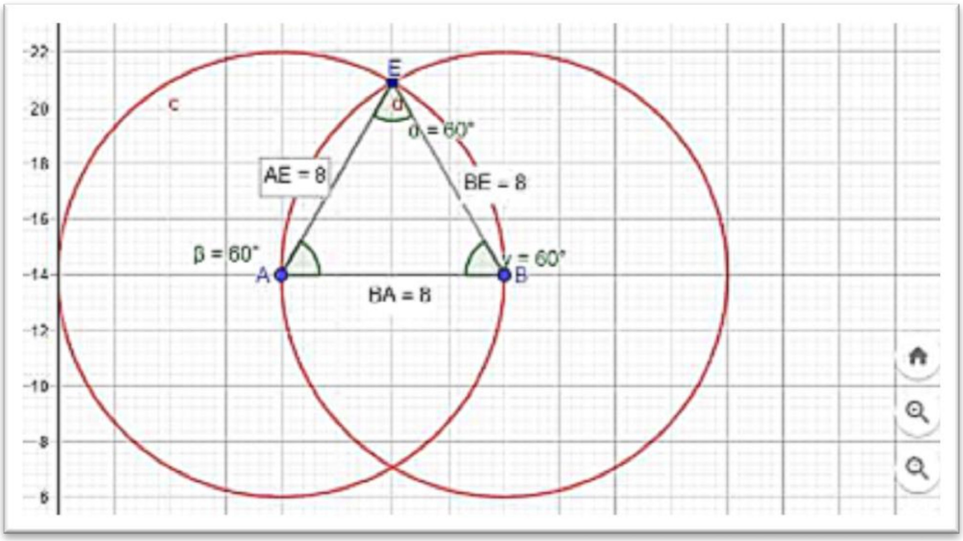
As justificativas apresentadas pelos alunos podem contribuir muito para um redirecionamento ou continução das próximas tarefas.

Após esse momento, comentamos que Euclides havia começado sua obra com algumas definições, como aquelas que estavam no quadro e, em seguida, apresentamos a proposição 1, sobre a construção do triângulo equilátero: "Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada" (BICUDO, 2009, p. 99).

Após uma pequena discussão sobre as características desse triângulo, propusemos aos alunos que tentassem construí-lo com a ferramenta "Compasso". O objetivo final dessa tarefa era fazer com que as duplas percebessem o compasso como um instrumento para transporte de segmento, e constatassem que as medidas dos lados dos triângulos eram raios de uma circunferência. Também pretendíamos que todo o processo – da construção do triângulo equilátero às observações mencionadas – ocorresse da forma mais livre possível, ou seja, que os alunos definissem seus próprios caminhos.

Algumas duplas conseguiram construir o triângulo equilátero de forma mais rápida do que o esperado. Instantes após a proposta da construção, a dupla D11 construiu o triângulo equilátero, conforme a figura 28.

Figura 28 - Construção do triângulo equilátero pela dupla D11



Fonte: Dados da pesquisa.

A dupla D11 realizou essa construção de uma forma diferente das demais duplas, pois usaram o mesmo arquivo do triângulo isósceles. Ao arrastar o segmento AB, o triângulo isósceles foi transformado em um triângulo equilátero, ao fazer com que dois de seus vértices coincidissem com o centro das circunferências. Inicialmente, os alunos acessaram o arquivo do GeoGebra que continha a construção do triângulo isósceles realizada por eles na aula anterior, onde os segmentos AE e EB eram iguais e o segmento AB de tamanho menor (figura 28). Quando solicitamos a construção do triângulo equilátero, em um curto intervalo de tempo, a dupla clicou no ponto B e arrastou-o até a circunferência *c*, e fez o mesmo no ponto A, arrastando-o até a circunferência *d*.

Paulo (D11): Professora! Isso aqui é um triângulo isósceles ou é equilátero?
Pedro (D11): É equilátero!
Prof. Thais: Oi meninos.
Paulo (D11): A gente terminou.
Prof. Thais: Já terminaram?
Paulo (D11): É só você reduzir o triângulo.
Prof. Thais: Vocês tinham feito um isósceles então? Mostre como estava.
Paulo (11): (arrastando o segmento AB) Estava assim.
(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

Apesar de a dupla D11[21] não chegar a construir o triângulo, utilizando a régua e o compasso do GeoGebra como esperado, entendemos, como Gravina (2015), que a manipulação da figura (do triângulo isósceles) também se constitui em uma estratégia para alcançar o objetivo final da tarefa 6: a elaboração de uma justificativa de uma construção. Para Gravina (2015, p. 244):

> O procedimento de construção informa os 'fatos declarados'. As regularidades observadas mediante manipulação da figura dinâmica, informam sobre regularidades que não foram declaradas – os *fatos implícitos* – que se tornam passíveis de explicação via argumentação dedutiva.

Além de construir o triângulo equilátero, as duplas deveriam escrever por que era possível afirmar que o triângulo que construíram era equilátero. Na figura abaixo, registramos novamente o diálogo com a dupla D11.

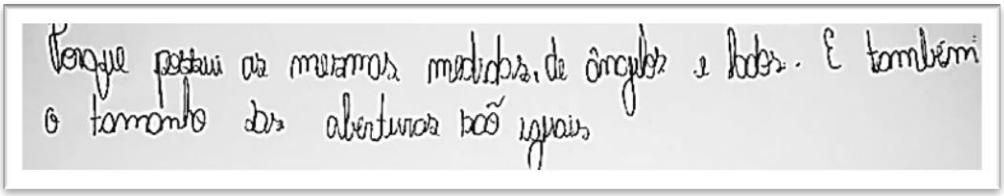
Paulo (D11): (lendo a pergunta) Por que podemos afirmar que todos os lados do triângulo equilátero são iguais?
Pedro (D11): Por que todos os lados dele é igual? Por isso ele é equilátero? Você não vai escrever isso não, né?
Paulo (D11): (depois de ler novamente a pergunta) Essa é mais difícil que a outra, né?
Pedro (D11): Porque tem tudo a mesma medida!
Prof. Thais: E aí meninos, conseguiram responder à pergunta?
Pedro (D11): Mais ou menos.
Prof. Thais: Por que esses três segmentos são iguais?
Paulo (D11): (apontando para a tela) Porque nós medimos os segmentos e eles têm a mesma medida.
Prof. Thais: Quando vocês fizeram, vocês ainda não tinham certeza que eles tinham as mesmas medidas. Vocês confirmaram agora e só por isso utilizaram a ferramenta (para medir). Tentem usar mais argumentos para responder essa pergunta.

(Trecho do Diário de Campo da pesquisadora, 05/07/2019).

[21] Os nomes Fernando e Felipe são fictícios, foram usados apenas para escrever o diálogo.

Após um tempo, a dupla Paulo e Pedro (D11) registrou a seguinte justificativa para a afirmação de que o triângulo que construíram era equilátero:

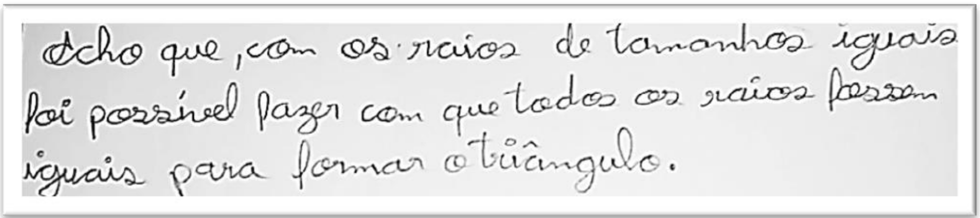
Figura 29 - Resposta da dupla D11


Porque possui as mesmas medidas, de ângulos e lados. E também o tamanho das aberturas são iguais

Fonte: Dados da pesquisa.

Verificamos que a dupla manteve a justificativa pelas medidas, mas a segunda frase parece apresentar indícios de uma aproximação da ideia de que os lados do triângulo equilátero são raios de uma mesma circunferência. Essa constatação foi encontrada nos registros da dupla D9, apresentada na figura 30.

Figura 30 - Resposta da dupla D9


Acho que, com os raios de tamanhos iguais foi possível fazer com que todos os raios fossem iguais para formar o triângulo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Lívia e Lúcia (D9) alcançaram um dos nossos objetivos com essa tarefa: justificar a construção do triângulo equilátero a partir dos raios das circunferências. Como parte final da tarefa 6, solicitamos às duplas que destacassem os três ângulos do triângulo equilátero, observassem o triângulo a partir da sua movimentação, e registrassem algumas observações sobre o que perceberam.

TAREFA 7 – CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO ESCALENO

Objetivo: Construção do triângulo escaleno a partir da proposição 22 do Livro I de Euclides.
Duração estimada: Duas aulas de 40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de Informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e software GeoGebra.

A tarefa 7[22] se refere à construção e exploração do triângulo escaleno, com o objetivo de estudar suas características e de preparar as duplas para a realização da tarefa 8[23]. Essa tarefa ocorreu cerca de um mês após a primeira avaliação do trabalho e foi desenvolvida durante três aulas.

Iniciamos a tarefa relembrando o trabalho desenvolvido anteriormente, por meio de imagens visualizadas por eles durante as tarefas anteriores. Mostramos aos alunos as imagens da biblioteca de Alexandria, do mapa do Egito e dos primeiros indícios do surgimento do esquadro, das construções de altares indianos e das figuras chinesas (calendários, etc.). Os alunos não se recordavam das figuras chinesas. Alguns afirmaram que não houve tarefas em que elas foram apresentadas. Acreditamos que o fato de essa tarefa 4 ter sido desenvolvida em um momento de agitação dos alunos, e em um tempo mais curto, fez com que o assunto não fosse assimilado por eles.

No GeoGebra, também propusemos aos alunos que recordassem como construíamos triângulos isósceles e equiláteros. Essa parte da tarefa foi desenvolvida de forma rápida pelas duplas, evidenciando que as habilidades haviam sido desenvolvidas e as noções ainda estavam presentes para eles.

[22] Ver texto orientador da página 86.
[23] Ver texto orientador da página 90.

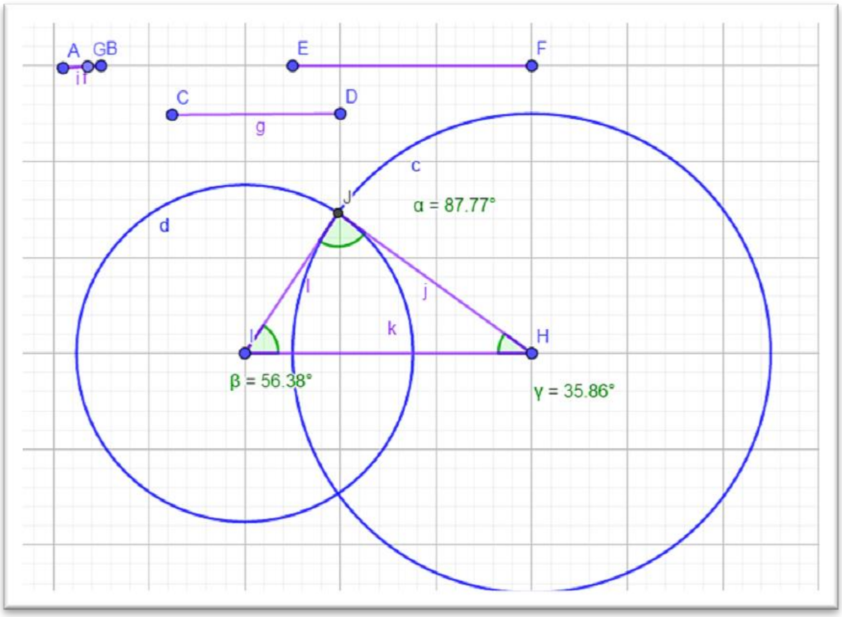
Em seguida, comentamos sobre o triângulo escaleno e solicitamos às duplas que construíssem, com a ferramenta “Compasso”, um triângulo que possuísse todos os lados com medidas diferentes.

A construção dos triângulos com essa ferramenta do GeoGebra permite que o aluno manipule os segmentos para verificar algumas propriedades. Por exemplo, podemos construir triângulos utilizando a ferramenta “Polígono”, mas teríamos um campo de aprendizagem unicamente relacionado aos triângulos e, com a construção com o compasso, podemos trabalhar com os elementos das circunferências.

Euclides realizou as construções com régua e compasso, e utilizou os elementos das circunferências para demonstrar. Dessa forma, é possível explorar mais ideias e conceitos geométricos.

Solicitamos às duplas que construíssem triângulos escalenos com a ferramenta “Compasso”. Esse momento da tarefa demandou um tempo maior que o programado, pois foram necessárias diversas tentativas. Bia e Bruna (D2), por exemplo, chegaram à seguinte construção:

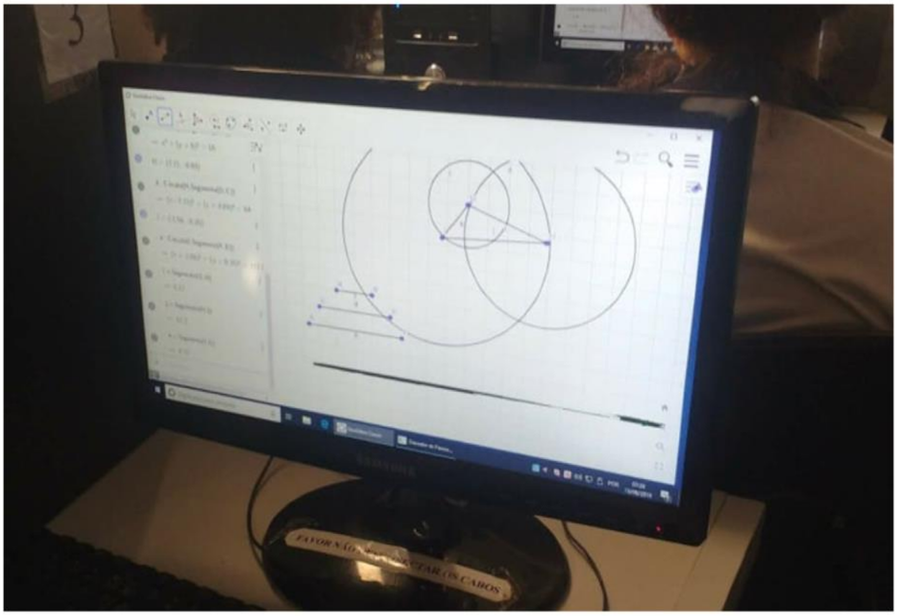
Figura 31 - Tentativa de construção do triângulo escaleno pela dupla D2



Fonte: Dados da pesquisa.

Essa dupla construiu um triângulo escaleno, entretanto, faltou construir o terceiro lado, também a partir de uma circunferência. Por outro lado, Leo e Luiz (D3) chegaram bem próximo da construção de Euclides em sua proposição 22[24] (a partir de três segmentos).

Figura 32 - Tentativa de construção do triângulo escaleno pela dupla D3



Fonte: Dados da pesquisa.

Entretanto, ao conferir o protocolo de construção do GeoGebra, verificamos que um dos lados do triângulo não é o raio de uma circunferência, ou seja, a dupla D3 inseriu a circunferência após a construção do triângulo. Algumas duplas não conseguiram chegar à construção correta, mas se aproximaram disso.

---

[24] Proposição 22. Para construir um triângulo com três segmentos de reta dados é necessário que o comprimento da soma de dois deles seja maior que o remanescente (BICUDO, 2009, p. 114).

Finalizamos a tarefa comentando com a classe que eles, sozinhos (ou seja, sozinhos nas duplas, sem ajuda externa), chegaram bem próximos a um conhecimento que Euclides, um grande matemático, formalizou há mais de dois mil anos. Explicamos que Euclides inseriu essa construção na obra "Elementos" e realizamos juntos a construção no GeoGebra.

Professor(a), elogie seus alunos!

TAREFA 8 – A CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO: PROPOSIÇÕES 20 E 22 DO LIVRO I

Objetivo: Estudar sobre a condição de existência de um triângulo a partir das proposições 20 e 22 do Livro I de Euclides.
Duração estimada: uma aula de 40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de Informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e software GeoGebra.

Nesta tarefa, nosso objetivo era trabalhar com a condição de existência de um triângulo, a partir da construção de um triângulo qualquer com a ferramenta "Compasso"[25]. O propósito era tentar levar os estudantes a compreenderem, por meio de construções geométricas e de reflexões sobre as mesmas, as proposições 20 e 22 do Livro I de Euclides.

> Proposição 20. Em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.
> Proposição 22. Para construir um triângulo com três segmentos de reta dados é necessário que o comprimento da soma de dois deles seja maior que o remanescente (BICUDO, 2009, p. 112 e 114).

Entretanto, devido a vários problemas[26] e atrasos, essa tarefa não foi totalmente concluída.

Inicialmente, propusemos aos alunos que construíssem novamente um triângulo escaleno, destacando (com cores) os três segmentos utilizados. A partir dessa construção, as duplas deveriam registrar a medida dos três segmentos utilizados para construir o triângulo. Com a

No texto orientador da tarefa 8 você poderá conferir a nossa proposta na íntegra.

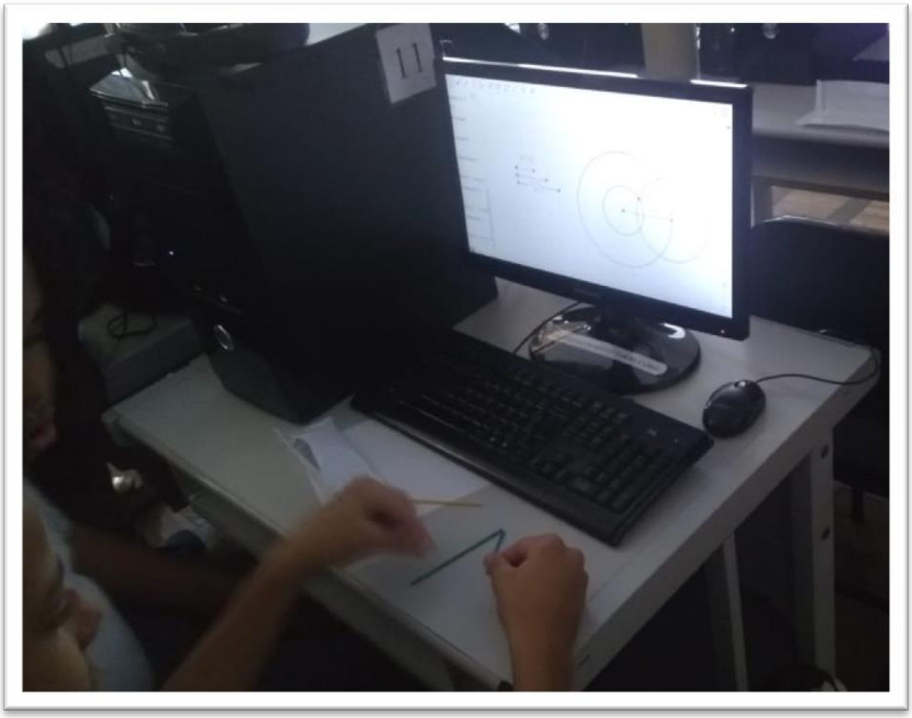
[25] Ver texto orientador da página 90.
[26] Alguns dos problemas foram: mudança do professor da classe, preocupação da coordenação com o tempo dedicado à Geometria, em detrimento de outros temas, o que levou à uma redução do tempo disponível para a finalização do trabalho.

manipulação dos segmentos, as duplas deveriam registrar mais dois conjuntos de medidas diferentes.

Em seguida, distribuímos às duplas algumas tríades de medidas distintas para que construíssem os triângulos no GeoGebra. Para agilizar esse momento (pois não tínhamos muito tempo para essa tarefa), em vez de construir o triângulo para cada tríade, as duplas deveriam construir o triângulo uma única vez e movimentar os segmentos para que tivessem as medidas solicitadas em cada tríade. Nesse momento, todas as tríades formavam triângulos e, em um outro momento dessa tarefa, pretendíamos entregar tríades que não formassem um triângulo.

Para auxiliar na descoberta, paralelamente à construção no GeoGebra, alguns testes foram realizados com palitos coloridos de comprimentos distintos (figura 33).

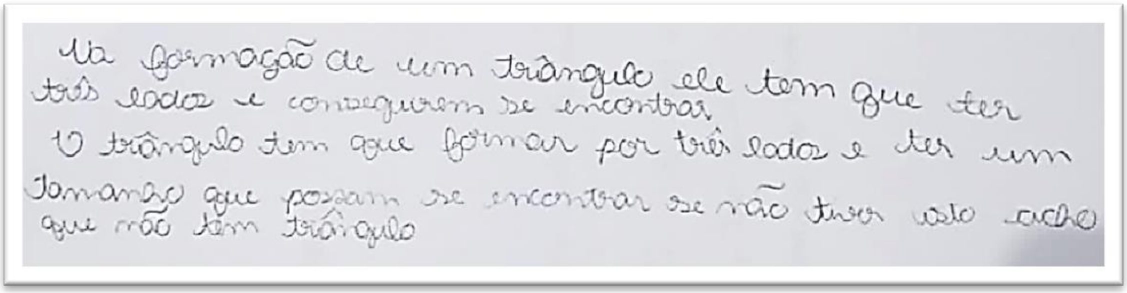
Figura 33 - Dupla D11 testando os palitos para formar um triângulo



Fonte: Dados da pesquisa.

Entregamos à cada dupla quatro palitos de cores e medidas diferentes. Solicitamos que formassem triângulos escolhendo três deles. As duplas rapidamente escolheram três palitos que permitiam formar um triângulo. Em seguida, sugerimos que testassem outros conjuntos de palitos. O objetivo era levá-los a observar, por meio das tentativas, que nem todo conjunto de três palitos permite formar um triângulo. Com a percepção de que nem todos os conjuntos de três palitos escolhidos formavam um triângulo, solicitamos que as duplas registrassem qual seria, para eles, a condição para a formação de triângulos. Lívia e Lúcia (D9) registraram que:

Figura 34 - Justificativa de Lívia e Lúcia (D9).



Na formação de um triângulo ele tem que ter
três lados e conseguirem se encontrar
O triângulo tem que formar por três lados e ter um
tamanho que possam se encontrar se não tiver isto acho
que não tem triângulo

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que Lívia e Lúcia perceberam que os tamanhos dos palitos influenciavam a formação do triângulo. Talvez, se tivéssemos mais tempo, a dupla (D9) teria chegado próximo à proposição 20 de Euclides sobre a condição de existência de um triângulo.

Davi e Diego (D14) justificaram de forma semelhante, dizendo que:

> Um dos lados não fechou por causa do tamanho do segmento. Quando as medidas dos segmentos não são muito superiores aos outros fechamos o triângulo e com as medidas iguais formamos o triângulo equilátero.

Os alunos Davi e Diego escreveram no registro sobre os tamanhos dos lados do triângulo. Em ambos observamos a possibilidade de chegar até a condição de existência de um triângulo, pois diante de todos os dados analisados até esse momento, os alunos (ou pelo menos a maioria deles) pareciam ter aprendido a levantar conjecturas.

Em relação à tarefa 8, verificamos que uma das dificuldades da utilização pedagógica da História está relacionada ao tempo de execução da tarefa. Para chegar a um conhecimento matemático, é preciso mobilizar a imaginação dos alunos, além de criar oportunidades para que eles levantem hipóteses e conjecturas. Mas, para isso, o professor deve destinar um tempo suficiente para a tarefa.

Percebemos que, mesmo com a não finalização dessa tarefa, as justificativas dos alunos mostraram que, com mais tempo e mais estímulos, eles poderiam chegar próximo às proposições 20 e 22 do livro I de "Elementos". E acreditamos que esse momento pode ter contribuído, de alguma maneira, para que possam fazer conjeturas em atividades matemáticas futuras.

Contudo, as tarefas possibilitaram aos alunos um ambiente para o "pensar matemático", e não apenas uma "aceitação, passiva, de conhecimentos apresentados como sequência bem ordenada de 'fatos' e argumentos 'prontos' " (GRAVINA, 2001, p. 17).

Considerações Finais

Professor (a), com este Produto Educacional, volume 2, nossa intenção foi mostrar a você, as possibilidades e potencialidades da História da Matemática, na sala aula do Ensino Fundamental, desenvolvidas no laboratório de informática. Dentre as várias possibilidades históricas, selecionamos uma obra que influenciou – e, em alguma medida, ainda influencia – o ensino da Geometria em boa parte do mundo: os “Elementos”, de Euclides.

É importante ressaltar que muitos são os desafios a serem enfrentados por nós, professores de Matemática, em um laboratório de informática, tanto em relação aos aspectos técnicos quanto em relação ao conhecimento necessário para o desenvolvimento de um trabalho que também possui uma perspectiva histórica. Entretanto, ao enfrentar esses desafios, nossos estudantes podem ter outra percepção acerca da Matemática.

Ao final deste estudo, verificamos que a natureza das tarefas aliada à manipulação de figuras permitida pelo GeoGebra, contribuíram para a compreensão dos entes primitivos (base para as construções geométricas), para a formulação de conjecturas e verificação das propriedades de triângulos e quadrados, dentre outras.

Buscamos, com essas tarefas, mostrar um caminho diferente para o ensino de Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental que leve os estudantes a perceberem a Matemática como uma construção humana, social e cultural, que levou milhares de anos para se desenvolver e que ainda segue em construção. Além disso, a partir de algumas proposições dos “Elementos” e do auxílio do GeoGebra, os estudantes possam compreender noções de Geometria plana.

As tarefas apresentadas no volume 1 são essenciais para o desenvolvimento das tarefas apresentadas aqui, no volume 2. Entretanto, caso perceba que a sua classe tenha conhecimentos prévios necessários para as tarefas deste volume, saiba que não é nossa intenção apresentar um roteiro (um passo a passo) a ser seguido. O objetivo é inspirar você a construir seu próprio caminho, sua própria “viagem no tempo” em busca de um ambiente de aprendizagem onde os estudantes possam ser ativos na construção do conhecimento e que percebam a Matemática como uma construção humana.

Referências

BICUDO, I. **Os Elementos - Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

GASPAR, M. T. J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. 318 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa. **Revista Eletrônica VIDYA**. v. 35, n. 2, p. 237-253. Santa Maria, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/605>. Acesso em: 27 de maio de 2018.

JACINTO, H.; CARREIRA, S. Diferentes Modos de Utilização do GeoGebra na Resolução de Problemas de Matemática para Além da Sala de Aula: evidências de fluência tecno-matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 266 - 288, abr. 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2017000100015&script=sci_abstract&tlng=pt> Acesso em: 16 de janeiro de 2020.

LINGEFJARD, T. **Rebirth of Euclidean Geometry?**. In: Bu L., Schoen R. (eds) Model-Centered Learning. v. 6. The Netherlands: Sense Publishers, 2011. pp 205-215. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/302411771>. Acesso em: 25 de abril de 2018.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios.** 1 ed., 2 reim. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

Algumas sugestões de avaliação das tarefas

Professor (a), quero lhe apresentar algumas sugestões de avaliações que podem ser aplicadas aos estudantes para obter iformações sobre o trabalho desenvolvido com eles.

Avaliando o trabalho

1) Conte o que você aprendeu sobre:

a) A Matemática dos povos antigos?

____

____

b) A Biblioteca de Alexandria?

____

____

c) Os “Elementos” de Euclides?

____

____

2) Procure se lembrar de cada aula e expresse sua opinião sobre as tarefas realizadas em sala de aula e no laboratório. Como você avaliaria o trabalho realizado?

____

____

3) Em sua opinião, como surgem os conhecimentos matemáticos? Por que nós utilizamos muitos conhecimentos que já eram conhecidos por povos bem antigos?

____

____

4) Por que nós utilizamos muitos conhecimentos que já eram conhecidos por povos bem antigos?

____

____

5) Em sua opinião, qual a importância dos livros de Euclides?

____

____

6) Como você acha que eu poderia melhorar as tarefas propostas?

____

____

Professor (a), as linhas deixadas como espaço para registrar as respostas são sugestivas. As mesmas podem limitar as respostas dos estudantes. Verifique se, para o seu grupo de estudantes, aumentar, diminuir ou até mesmo retirar as linhas, seria um caminho melhor.

Finalizando o projeto: o que aprendemos?

1) Escuto muitos alunos comentarem muitas coisas sobre a Matemática e sua história. E você, o que pensa sobre cada ideia a seguir?

Escreva sua opinião e explique por que pensa assim.
Se o espaço for insuficiente, use o verso da folha.

a) A história da Matemática mostra que alguns poucos homens muito inteligentes criaram todos os conhecimentos matemáticos.

b) Criar novos conhecimentos matemáticos é algo que apenas os gênios conseguem.

c) A história da Matemática mostra que muitas pessoas, homens e mulheres, de várias partes do mundo, desenvolveram conhecimentos matemáticos.

d) Todas as pessoas são capazes de aprender Matemática.

e) A Matemática é uma matéria que ainda está em desenvolvimento e novos conhecimentos ainda estão sendo produzidos no mundo.

f) Muitos povos antigos usavam conhecimentos matemáticos para resolver suas questões cotidianas.

____

____

g) Toda a Matemática já foi inventada ou descoberta. Não existem novos conhecimentos.

____

____

2) Pense em todo o trabalho que desenvolvemos sobre Euclides e os Elementos, sobre a História da Matemática e sobre Geometria. O que você aprendeu?

____

____

____

____

____

____

____

____

Finalizando o projeto: o que aprendemos no GeoGebra?

1) No Livro 1 da obra "Elementos", Euclides apresentou várias frases chamadas de proposições. Estudamos algumas delas durante nossas aulas. Leia cada texto a seguir e construa a figura no GeoGebra. Em seguida, escreva um pequeno texto no qual explique por que a construção é válida.

a) Na proposição 10, Euclides apresentou a seguinte ideia:

Determinar o ponto médio de um segmento de reta dado.

Para iniciar a sua justificativa, Euclides começou a escrever a seguinte frase:

Seja o segmento de reta AB, é preciso cortá-lo em duas partes iguais.

Agora é com você!

I) Utilize o GeoGebra para fazer a construção do ponto médio de um segmento de reta utilizando a ferramenta "Compasso".

II) Escreva um pequeno texto explicando como você determinou o ponto médio do segmento de reta e como pode ter certeza de que o segmento foi dividido em duas partes iguais.

____

____

____

____

____

____

____

b) Na proposição 19, Euclides apresentou a seguinte ideia:

Em qualquer triângulo o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Para iniciar a sua justificativa, Euclides começou a escrever a seguinte frase:

Seja o triângulo ABC, se o ângulo B é maior que o ângulo C, dizemos que o lado AC é maior que o lado AB.

Agora é com você!

I) Utilize o GeoGebra para fazer a construção de um triângulo qualquer utilizando a ferramenta "Compasso" (como aprendemos nas últimas aulas).

II) Escreva um pequeno texto explicando por que essa frase é verdadeira e como você fez para verificar isto.

Aqui, espera-se que o aluno já esteja mais à vontade com o *software* GeoGebra e que realize as construções e escreva os textos sem intervenções. Entretanto, é importante ressaltar que cada estudante pode finalizar esta avaliação em tempos diferentes, de acordo com o nível de consolidação do trabalho desenvolvido anteriormente.

Texto orientador das tarefas desenvolvidas

Tarefa 3

Primeiros contatos com o *software* GeoGebra: construção do quadrado

Tempo de desenvolvimento: Duas aulas de 40-50 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro, GeoGebra.

Na última aula, concluímos alguns altares. Como alunos de Euclides e estudantes da Biblioteca de Alexandria vocês utilizaram régua e compasso para construir os quadrados e o esquadro auxiliou na construção dos retângulos.
Sabemos que os altares indianos surgiram muito tempo antes de Euclides e eles já utilizavam a Matemática. Existiam registros em papiros, barros e couro de animais sobre a Matemática, mas eram conteúdos mais voltados para a prática do dia a dia.
É por isso que Euclides foi muito importante, porque foi ele organizou e estruturou conhecimentos matemáticos de forma lógica, explicando o porquê se calculava ou fazia as construções de determinada maneira.
Na nossa primeira aula, mencionei que não temos mais a obra original de Euclides, mas várias cópias foram realizadas ao longo do tempo.

Cópia dos "Elementos" escrita em grego, à mão, datada de 888 d.C.

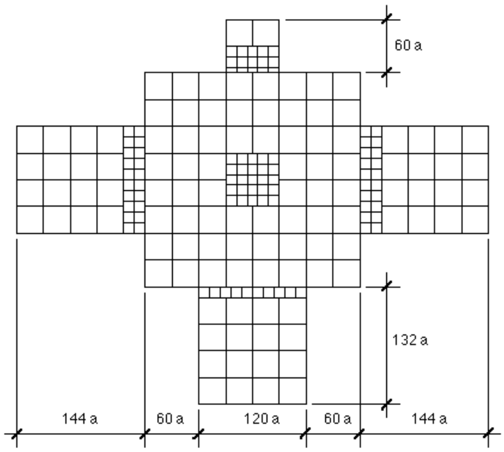
Fonte: https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions

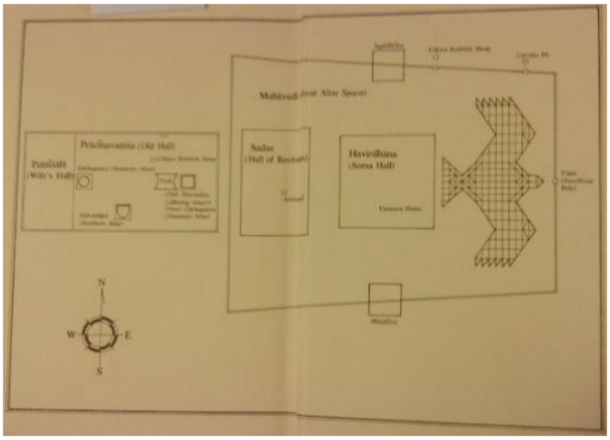
Cópia dos "Elementos" em latim, com detalhes em ouro, de 1482 + -

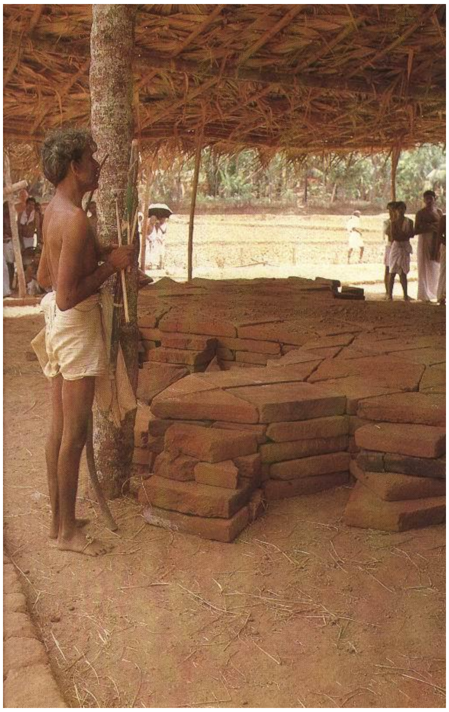
Fonte: https://www.wdl.org/pt/item/18198/view/1/6/

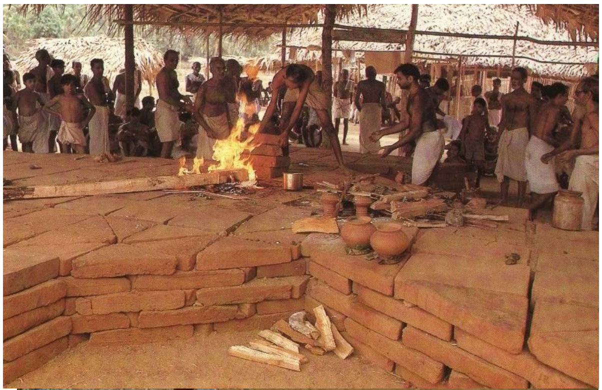
Os indianos usavam conhecimentos matemáticos para construir os quadrados que formam o altar do Falcão, mas como alunos de Euclides, aprenderam a construir esses quadrados utilizando a régua e o compasso.

O altar do Falcão que construíram era o mais básico deles, existem outros mais complexos:









Fonte:
https://www.pinterest.co.uk/pin/571112796474610426/
http://athirathram.tripod.com/Bricks_In_to_Cows.JPG
http://athirathram.tripod.com/Altar_Of_Fire.JPG
http://www.allempires.com/forum/forum_posts.asp?TID=28550&PID=635783

Agora, vamos assistir a um pequeno trecho de um vídeo que mostra alguns indianos na construção desse altar. Não está em nossa língua, mas o importante é vocês observarem as imagens. Ele foi filmado em 1976 e representa os processos de construção de altares seguindo a tradição de mais de 4000 anos. Vídeo editado do vídeo original disponível em:
https://www.youtube.com/watch?v=DLKHQ_HI6OI

Observações:
- Durante o vídeo, dar ênfase nas medições, na construção de uma representação que permitisse saber como posicionar os tijolos. Também destacar a construção dos tijolos e os homens trabalhando.
- Fazer um vínculo com Euclides. Nos Elementos, ele aproveita o conhecimento que esse povo tinha e registra de uma forma organizada a construção das figuras.

Como estamos no século XXI, onde já existe grandes invenções tecnológicas, a partir de agora vocês utilizarão o que aprenderam para continuar estudando Matemática.

Através de um programa (um *software*) vamos construir um quadrado utilizando o mesmo conhecimento de Euclides de mais de dois mil anos atrás, porém em um computador!

O GeoGebra é o programa matemático que será um ambiente de aprendizagem para vocês. Ele possui ferramentas para construir figuras (na parte superior esquerda) um menu (na parte superior direita) e dois campos de visualização: a janela de visualização (onde realizamos as construções) e a janela de álgebra (onde aparece o nome e a representação algébrica de cada figura construída).

Observações:
- Utilizar o Datashow para auxiliar nessa breve apresentação do GeoGebra.

Agora vamos construir o quadrado que compõe o altar? Enquanto isso iremos aprender a utilizar as ferramentas e verificar o que Euclides escreveu sobre elas.

Observações:
- Ir fazendo perguntas sobre as figuras para verificar se os alunos lembrarão da construção do quadrado.

A janela de visualização é a nossa região de construção. Será o que Euclides chamou de "superfície plana".

A primeira construção que vamos fazer é de uma linha, uma linha reta que é chamada apenas de reta. No GeoGebra, a construção da reta é dada por dois pontos que são nomeados automaticamente por duas letras maiúsculas do alfabeto. Para distinguir de outras retas, o GeoGebra também dá nomes a elas como letras minúsculas do alfabeto.
(ir explicando algumas funções como: exibir objeto, apagar, voltar, dentre outros)

Euclides escreveu que uma "linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma", ou seja, esses dois pontos que apareceram estão em destaque apenas para determinar a construção da reta, mas nela há infinitos pontos.
(Pedir para inserir pontos na reta, dar zoom na tela para verificar que é possível inserir mais pontos. Mostrar a eles que podem apagar a figura e pedir para que construam novamente uma reta.)

Como não precisamos da reta toda para construir o quadrado, vamos construir um segmento de reta que será um lado do quadrado. Procure pela ferramenta "segmento". *(ensiná-los a configurar figuras para alterar suas cores) Botão direito -> Configurações -> Cor*

Agora vamos utilizar a ferramenta compasso para prosseguir. Essa é a ferramenta que simula o compasso físico. No compasso físico como fazemos a construção de um círculo? *(nesse momento os alunos terão com eles uma folha, régua e compasso para desenhar e relembrar)*

A abertura do compasso representa um tamanho (uma medida) e fazemos essa abertura manualmente. No GeoGebra, o Compasso precisará também de uma medida, para isso você deverá criar um segmento que represente a medida desejada. Clique na ferramenta Compasso, em cada uma das extremidades do segmento e no ponto em que deseja fixar o centro do círculo. *(mencionar que o GeoGebra também nomeia os segmentos com letras minúsculas)*

Para marcar os pontos de interseção você pode utilizar a ferramenta Ponto ou a ferramenta Interseção de Dois objetos.

Agora construímos duas circunferências em que precisamos das interseções delas para fazer a mediatriz (ou a perpendicular). Qual a medida vamos utilizar?
(construir as duas circunferências e traçar uma reta nas suas interseções)

Sobre a reta perpendicular Euclides escreveu: "Quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada de perpendicular àquela sobre a qual se alteou".
(lembra-los da linguagem e das palavras que possam ser desconhecidas)
Vamos levantar outra perpendicular sobre a outra extremidade do nosso segmento. (*deixar que façam sozinhos)*

Em um outro momento...

Hoje, alunos de Euclides, vamos terminar a construção do quadrado e para isso preciso que auxiliem uns aos outros para terminarmos o mais rápido possível.

Na última aula já tínhamos construído algumas figuras geométricas na janela de visualização (superfície) do GeoGebra: a linha que Euclides a chamou de reta, o segmento de reta em que Euclides disse ter pontos em suas extremidades, os pontos de interseção e os círculos.

Observações: Ir mostrando e colando as plaquinhas com as definições.

A interseção dos círculos nos permitirá a construção de uma nova figura geométrica: a perpendicular. Sobre a reta perpendicular Euclides escreveu:

“Quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada de perpendicular àquela sobre a qual se alteou”.

Observações: lembrá-los da linguagem e das palavras que possam ser desconhecidas. As duplas que terminaram a construção do quadrado solicitar que construam mais quadrados para o altar e/ou auxiliem os colegas.

Vamos levantar outra perpendicular sobre a outra extremidade do nosso segmento. Essa reta Perpendicular também é chamada de reta Mediatriz que significa ser uma reta Perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento.

Observações: deixar que façam sozinhos.

Precisamos agora determinar mais dois lados do nosso quadrado, para isso vamos continuar usando a nossa ferramenta compasso. Anteriormente, fazíamos apenas uma “marcação” nas perpendiculares, mas vocês perceberam que o compasso do GeoGebra nos fornece diretamente o círculo? Então precisaremos construir dois círculos com a medida no lado do quadrado (o primeiro segmento que construímos) e o seu centro nas extremidades desse lado (segmento).

Para terminar o nosso quadrado vamos utilizar uma ferramenta chamada “Reta paralela”. Euclides também definiu o que seriam as Paralelas:
“Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente nos dois sentidos, não se cruzam.”

Observações: pedir para que construam segmentos nos lados do triângulo e que alterem suas cores.

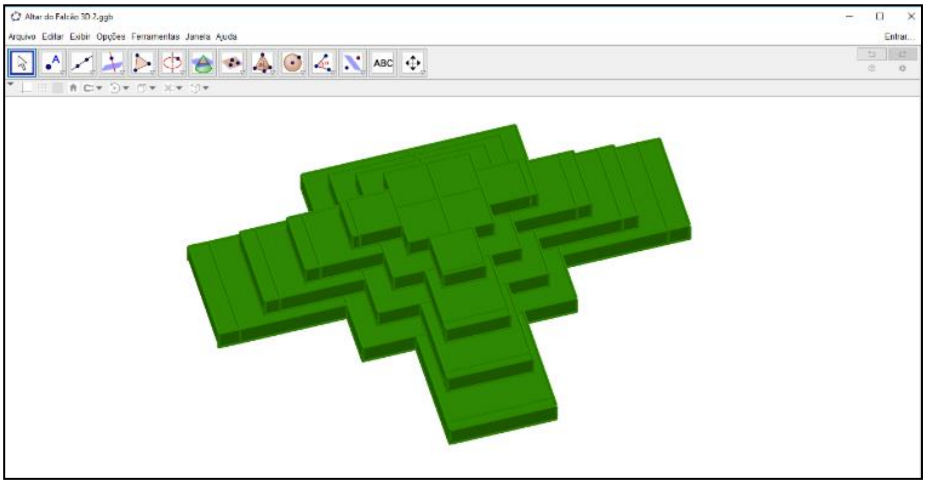
Sobre o ângulo reto do quadrado:

Usar o GeoGebra do computador principal para mostrar a necessidade de construir perpendiculares.
Usar um quadrado com todas as figuras utilizadas para a sua construção e destacar os seus ângulos retos.
Construir um quadrilátero (tentar aproximá-lo do quadrado) com segmentos de retas sem a malha quadriculada e, usar a ferramenta ângulo para destacar os ângulos dos quatro vértices.

O altar do falcão no GeoGebra 3D

Vocês observaram no vídeo alguns indianos fazendo a representação do altar com peças menores? Aquela representação era para visualizar como montariam o altar do Falcão com os tijolos maiores. Já pensou se eles tivessem o GeoGebra naquela época?

Observações: Mostrar a imagem do altar do falcão do GeoGebra.



Exemplo de um modelo 3D do altar do Falcão com várias camadas.

Tarefa 4

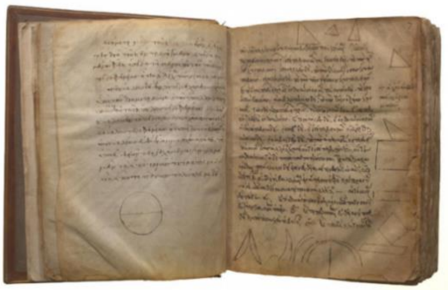
O círculo e a circunferência

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro, GeoGebra.

Agora que vocês já sabem fazer construções no GeoGebra, vamos prosseguir e aprender a fazer novas construções.
Antes, precisamos aprender sobre uma figura que está muito presente na obra de Euclides: o círculo.

Observações: Mostrar novamente as versões antigas dos "Elementos" para visualizarmos os círculos.

Cópia dos "Elementos" escrita em grego, à mão, datada de 888 d.C.



Fonte: https://www.claymath.org/euclid/index/book-1-definitions

Cópia dos "Elementos" em latim, com detalhes em ouro, de 1482 + -

Fonte: https://www.wdl.org/pt/item/18198/view/1/6/

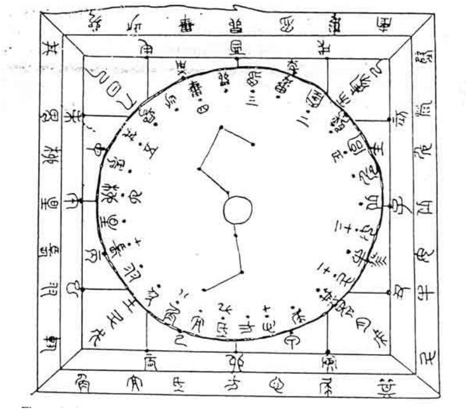
Usamos os círculos para construir as perpendiculares do quadrado conforme os "Elementos" de Euclides.

Muito antes de Euclides, várias civilizações utilizavam os círculos, dentre eles a China. Vocês sabem onde fica a China?

Observações: Pedir para que localizem no mapa colorido e, logo em seguida, pedir para que pintem o país no mapa preto e branco do caderno.

As origens do interesse chinês pelo círculo estão relacionadas com a astronomia e, por meio dela, com a natureza divina do céu, das estrelas e o movimento dos objetos celestes.

Calendário chinês



No século III a. C., na dinastia Zhou, é produzido um texto chamado Zhoubi no qual Shang Gao, um sábio, conversa com o duque de Zhou.

"O quadrado pertence à Terra, e o círculo pertence ao Céu. O Céu é um círculo e a Terra é o quadrado. Os números do quadrado são básicos e o círculo é produzido a partir do quadrado".

Fonte: http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado

As imagens a seguir aparecem nas primeiras edições do Zhoubi.

quadrado dentro do círculo (yuang fang)

círculo dentro do quadrado (fang yuan)

Fonte: http://personal.us.es/cmaza/china/circulo.htm#C%C3%ADrculo%20y%20cuadrado

A relação entre Céu e Terra, de acordo com a religiosidade chinesa, acontece em ambos sentidos, ou seja, não apenas os deuses influenciavam os homens, mas a atitude moral e as ações dos homens também afetavam o Céu e os deuses. O círculo era muito utilizado pelos povos antigos e Euclides também destacou essa figura em seus livros, sempre usando régua e compasso.
Como alunos de Euclides, vocês já construíram círculos para formar novas figuras. Agora, me respondam:

Como um círculo é construído usando um compasso? Se quisermos fazer círculos maiores ou menores, como faríamos? E se quisermos construir círculos do mesmo tamanho?

No GeoGebra, existem várias ferramentas para construir círculos:
(mostrar as definições de Euclides a partir das construções dos círculos no GeoGebra)
- Círculos dados centro e um dos seus pontos (construir)
Euclides escreveu que seria possível "com todo centro e distância, descrever um círculo" (Postulado 3)
E ainda, disse que "o ponto é chamado centro do círculo".
Ele disse então que "círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.

Observações: Mostrar a diferença de círculo e circunferência e a distância do centro até a circunferência é chamada de raio.

O ponto B pode ser movimentado, pois é o ponto que definiu o tamanho do seu círculo. Veja o que acontece!
Construa uma reta que passa pelo centro do círculo. Faça um segmento que passa pelo centro e tem extremidades na circunferência. Temos então o diâmetro!

Euclides também escreveu o que era diâmetro. Ele disse que "diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois".

Um dos seus pontos pode ser movimentado. Qual é a relação entre o raio e o diâmetro?
- Círculos dados centro e raio (construir)
- Compasso (construir)

Euclides construiu várias figuras geométricas a partir dos raios de circunferências. Então agora, com uma ou mais circunferências, vocês usarão a criatividade para construir figuras geométricas utilizando apenas raios.

Observações: Finalizar a tarefa com a construção de figuras geométricas utilizando apenas raios da circunferência.

Tarefa 5

Construção do triângulo isósceles e a exploração da proposição 3 do Livro I

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e GeoGebra.

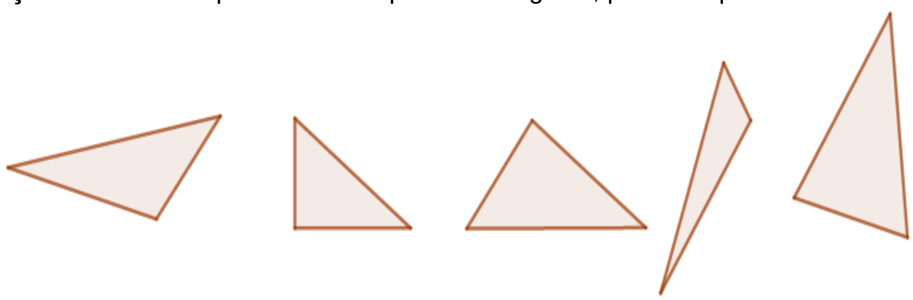
Construção e breve exploração do triângulo isósceles.

Agora que já sabemos o que é raio e diâmetro de uma circunferência e sabemos como construir figuras utilizando esses raios, vamos aprender com Euclides sobre uma outra figura: o triângulo.
Antes disso, vamos assistir a um pequeno vídeo que contará um pouquinho da utilização dos triângulos por povos antigos.

Vídeo: https://youtu.be/dsjiWChrjE4
(O legado de Pitágoras, Ep.1 – Documentário 2010) ⇒ Trechos de 22:33 a 26:00 e de 29:09 a 30:15.

Figuras tão importantes para várias civilizações não poderiam ficar fora do trabalho de Euclides. E, como aprendizes de Euclides, também vamos aprender bastante!

Observações: Afixar no quadro vários tipos de triângulos, por exemplo:

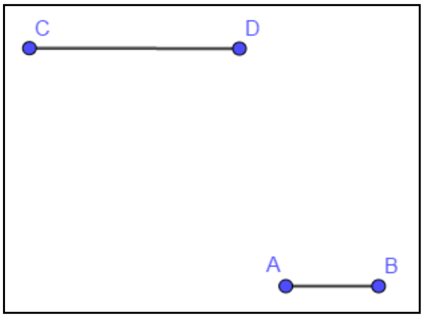


O que vocês saberiam me dizer sobre esta figura?

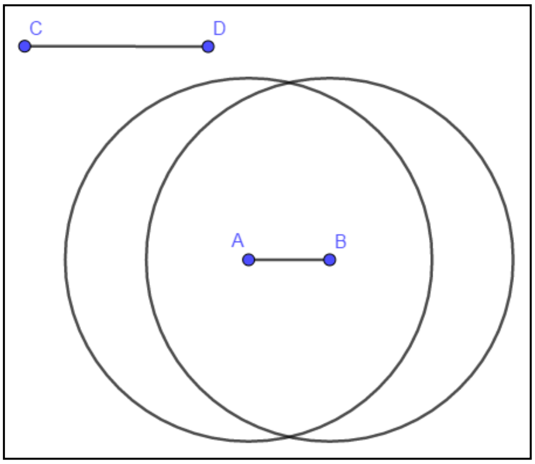
Observações:
- Dependendo de como for as respostas, comentar que quando as crianças estão começando a aprender sobre figuras geométricas elas acham que só existe um tipo de triângulo e que as demais figuras são diferentes de triângulos.
- Apresentar as informações sobre os triângulos (vértices, segmentos/lados, …) logo após a colagem das figuras.

CONSTRUÇÃO 1: Euclides construiu os triângulos e várias outras figuras utilizando o compasso, ou seja, as circunferências. Agora vamos aprender a construir um triângulo utilizando também a ferramenta “Compasso” do GeoGebra: vamos construir um triângulo isósceles!

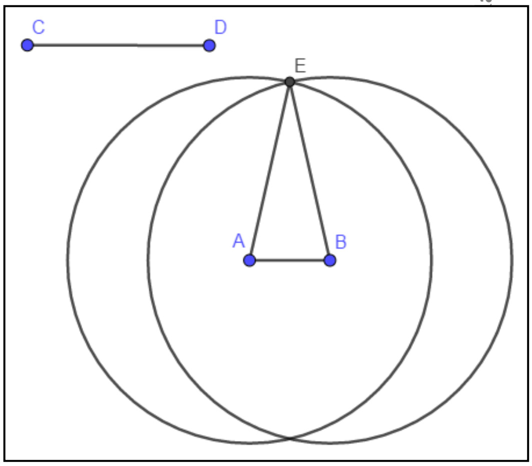
O que é um triângulo isósceles?
Quem pode me mostrar qual ou quais das figuras coladas no quadro representa um triângulo isósceles?
Quais são suas características?



Construam dois segmentos (AB e CD) sendo CD maior que AB.



Utilizem a ferramenta “Compasso” para construir duas circunferências com centros em A e B e raio CD.



Com um dos pontos de interseção das circunferências, construam um triângulo.

Ideias de Euclides a serem utilizadas na construção (já estarão coladas no quadro):
Definição 1 – Ponto é aquilo de que nada é parte.
Definição 2 – E linha é comprimento sem largura.
Definição 3 – Extremidades de uma linha são pontos.
Definição 15 – Círculo é uma figura plana contida...
Definição 16 – E o ponto é chamado centro do círculo.
Postulado 3 – Com todo centro e distância, descrever um círculo.

Registro 1: *Tentem agora explicar (registrando no caderno) o porquê a sua construção final gerou um triângulo isósceles.*

Observações:
- Aguardar o registro dos alunos e compartilhar algumas respostas.

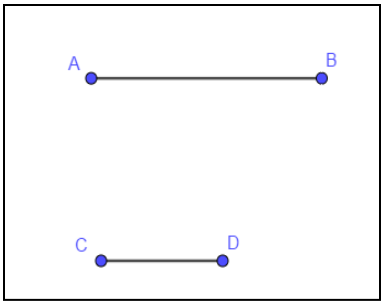
Clique e arraste um dos pontos do segmento CD. O que vocês observam?

Na época de Euclides, para visualizar triângulos de tamanhos diferentes era necessário fazer várias construções, já no GeoGebra...

Exploração da proposição 3

CONSTRUÇÃO 2: Agora, construam dois segmentos de reta (AB e CD), sendo que AB deve ser maior que CD.

Agora, é com vocês! Destaquem do segmento maior (AB), um outro segmento igual ao segmento menor (CD).



Registro 2: *Expliquem no caderno como fizeram esse processo e tentem explicar por que fizeram assim. Também preciso que colem as ideias de Euclides que vocês observam nessa construção.*

Vocês chegaram a um conhecimento que Euclides registrou em sua obra há mais de dois mil anos! Ele começou a apresentar esse conhecimento assim:

3. Dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual à menor.

"Sejam duas retas desiguais dadas AB e CD, da qual AB é maior; é preciso, então, subtrair da maior AB uma reta igual a menor."

Observações: Mostrar a continuação da proposição caso os alunos demonstrem interesse.

Tarefa 6

A proposição 1 do Livro I: Construção do triângulo equilátero

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos.
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, caderno de registro e GeoGebra.

Retomando a construção do triângulo isósceles para exploração das proposições 5 e 6.

CONSTRUÇÃO 1: Hoje vamos continuar estudando o triângulo isósceles.

Faça a construção de um triângulo isósceles assim como aprendemos na última aula: construam o segmento AB que será a base do triângulo e o segmento CD que será a medida dos lados iguais.

Utilizem a ferramenta "Ângulo" para visualizar as medidas dos ângulos do triângulo.

Registro 1: O que vocês observam? (Registrem).
Utilizem a ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" para visualizar as medidas dos lados do triângulo.
Clique e arraste um dos pontos do segmento CD.

Registro 2: registrem as medidas na tabela do seu caderno.

Medida dos ângulos iguais	Medida dos lados iguais	Medida da base

Registro 3: Agora pensem e registrem no caderno: o que acontece em todos os casos quando construo um triângulo sabendo que dois dos seus lados terão a mesma medida?

Euclides já sabia disso quando disse:
5. Os ângulos junto à base dos triângulos isósceles são iguais entre si [...].

E se construíssemos um triângulo sabendo que dois ângulos terão a mesma medida, também dois de seus lados terão a mesma medida.

Euclides também já sabia disso. No ítem 6 do Livro 1 dos "Elementos" ele apresenta essa descoberta! Vejam:

6. Caso dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, os lados que se estendem sob os ângulos iguais também serão iguais entre si.

Explicando a frase para os alunos: Euclides quis dizer que, se no triângulo houver dois ângulos de mesma medida, então dois lados desse triângulo (um de cada ângulo) também terão as mesmas medidas, ou seja, o triângulo será isósceles!

Exploração da proposição 1

CONSTRUÇÃO 2: E se um triângulo tiver todos os lados com a mesma medida da sua base? Como faremos?

Observações: Ouvir algumas respostas.

No livro 1 de os "Elementos", Euclides começou apresentando algumas definições (apontar para o quadro). Em seguida, escolheu como primeira proposição a seguinte:

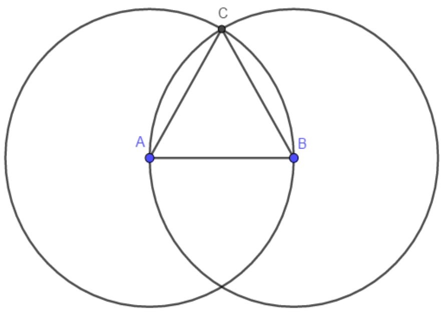
1. Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.

O que é um triângulo equilátero?
Quem pode me mostrar qual ou quais das figuras coladas no quadro representa um triângulo equilátero?
Quais são suas características?
Como podemos construir um triângulo equilátero?

Agora é com vocês!

Observações: Durante a construção, pedir para os alunos colarem as ideias de Euclides (definições) possíveis de serem utilizadas na construção:

Definição 1 – Ponto é aquilo de que nada é parte.
Definição 2 – E linha é comprimento sem largura.
Definição 3 – Extremidades de uma linha são pontos.
Definição 15 – Círculo é uma figura plana contida...
Definição 16 – E o ponto é chamado centro do círculo.
Postulado 3 – Com todo centro e distância, descrever um círculo.



Registro 4: Registrem como estão pensando.

Observações: Esperar que pensem um pouco, observar as construções das duplas.

Em todas as construções há um conhecimento Matemático. Euclides sempre apresentava justificativas para o conhecimento abordado, explicando o porquê e provando matematicamente que aquele conhecimento era verdadeiro.

Um triângulo equilátero é aquele que possui todos os lados com a mesma medida, a partir da construção que fizeram, gostaria que pensassem e respondessem no caderno de vocês:

Registro 5: Por que podemos afirmar que o triângulo que construímos é equilátero? Respondam no caderno e colem as ideias de Euclides que estão presentes nessa construção.

Observações: Esperar que registrem as respostas e compartilhar algumas.

Registro 6: Agora, observem os três ângulos desse triângulo, o que vocês podem dizer sobre eles?

Observações: Esperar que registrem as respostas e compartilhar algumas.

Utilizem a ferramenta “Ângulo” para verificar as medidas dos ângulos.

Tarefa 7

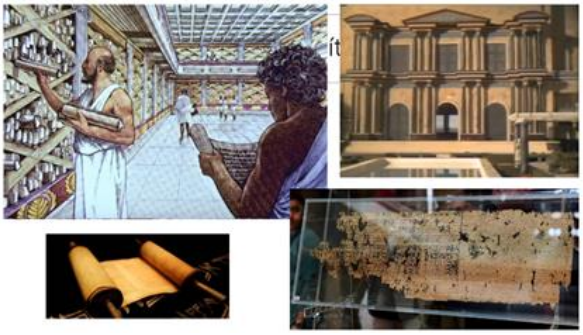
Feedback das tarefas anteriores e a construção do triângulo escaleno

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, GeoGebra e caderno de registro

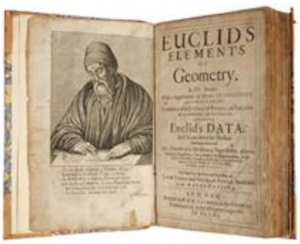
Relembrando o trabalho

Durante as nossas aulas fizemos uma viagem no tempo para saber de onde vêm muitas das ideias que vocês estudaram e/ou ainda estudarão em Matemática.

Gostaria de saber o que vocês se lembram do trabalho que fizeram?
Vocês se lembram dessas imagens?



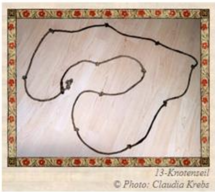
Sobre o que era os “Elementos” de Euclides?

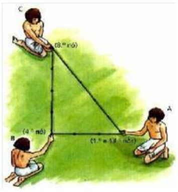


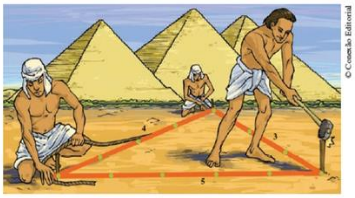
Estudamos algumas das ideias que Euclides (um importante matemático que viveu no século III a.C.) escreveu na sua obra chamada “Elementos”. Ele escreveu essa obra quando trabalhava na biblioteca de Alexandria, é nesse lugar que conhecimentos sobre várias coisas e de várias partes do mundo eram reunidos. Euclides estruturou os conhecimentos matemáticos daquela época em uma única obra.

Mas, para estudarmos essas ideias de Euclides fizemos algumas viagens a períodos anteriores a ele, para conhecer um pouco sobre a Matemática produzida antes de Euclides (que provavelmente influenciou o seu trabalho) e aprender um pouco sobre Geometria.

Primeiramente, ainda no Egito (bem antes de Euclides) vimos que a Geometria parece ter surgido a partir das medições de terra.







Observações: usar o GooGle Earth para sair de Minas Gerais (Ibirité) para o Egito. Mostrar o Rio Nilo.

Onde era esse lugar?

Viajamos para a Índia onde estudamos sobre a civilização Védica que construíam altares para alcançar bençãos.

Que Matemática estava envolvida nessas construções?

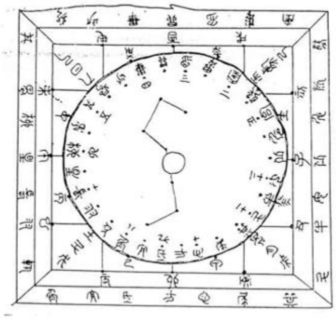
A partir da construção do altar do Falcão estudamos o que Euclides chamou de ponto, reta, segmento de reta, perpendicular e paralelas. Além disso, estudamos também sobre o quadrado e suas características.

Fizemos essas construções com a régua não graduada e compasso físicos e posteriormente com o GeoGebra. Foi um longo trabalho, mas vocês foram muito bem!

E dessas imagens, se lembram? De onde eram?

quadrado dentro do círculo (yuang fang)

círculo dentro do quadrado (fang yuan)



Viajamos para a China e vimos o quanto círculos e quadrados eram importantes para eles.

Alguém se lembra o que os círculos e os quadrados representavam para os chineses?

Os círculos para os chineses estavam relacionados com a Astronomia e com a natureza divina do céu. Essas figuras geométricas representavam o Céu e a Terra (círculo e quadrado, respectivamente). Estudamos então sobre os círculos, estudamos sobre a circunferências e seus elementos (centro, raio e diâmetro) para então construir figuras que também estão muito presentes na obra de Euclides: os Triângulos.

Construção do triângulo escaleno

Vamos continuar imaginando que vocês são alunos de Euclides, alunos que continuam utilizando a régua não graduada e o compasso, porém no GeoGebra.

Quem se lembra de como fizemos para construir um triângulo?

Observações: usar o GeoGebra para fazer a construção do triângulo a partir das respostas das duplas. Relacionar as ideias de Euclides com as ferramentas do software. Ao mesmo tempo as duplas também farão a construção no GeoGebra.

O que é mesmo um triângulo equilátero?
E um triângulo isósceles?

Como construir um triângulo isósceles no GeoGebra?

Existe algum outro tipo de triângulo? Qual? Quais são suas características?

Observações:

- Usar o GeoGebra para fazer a construção do triângulo a partir das respostas das duplas. Relacionar as ideias de Euclides com as ferramentas do software. Ao mesmo tempo as duplas também farão a construção no GeoGebra.
- Mencionar sobre o triângulo equilátero, pois muitos conseguiram construí-lo sem ajuda. Mostrar o triângulo construído no GeoGebra. Discutir sobre o porquê poderíamos afirmar que aquele tipo de construção gerava um triângulo equilátero.

Sobre o triângulo escaleno (após discutir suas características):

Tentem construir agora um triângulo escaleno.

Euclides também escreveu sobre como construir esse tipo de triângulo!

Tarefa 8

A condição de existência de um triângulo: proposições 20 e 22 do Livro I

Tempo de desenvolvimento: 30-40 minutos
Espaço/ambiente: Laboratório de informática
Materiais: DataShow, GeoGebra e caderno de registro

Caminhando para a descoberta da proposição 20

Irei distribuir a cada dupla, algumas tríades de medidas e quero que vocês construam triângulos com essas medidas. Depois, registrem sobre as características dos triângulos construídos.
Exemplo de medidas:

4, 7, 9 e 3, 3, 5　　6, 4, 3 e 1, 2, 2　　5, 6, 8 e 5, 5, 5　　8, 4, 6 e 4, 2, 4

O que vocês observaram?

Agora, vamos montar triângulos com alguns palitinhos. Entregarei quatro palitos de tamanhos diferentes para cada dupla e vocês devem escolher três deles para formar um triângulo.

Escolham um novo conjunto de palitos para testar. O que aconteceu?

Vocês receberão um novo conjunto de medidas para construir mais uma vez esses triângulos.
Exemplo de medidas:

3, 2, 1　　4, 5, 1　　8, 4, 3　　7, 5, 2　　6, 3, 2　　5, 7, 2

Provavelmente, quando esse problema surgiu antigamente, os matemáticos e até mesmo Euclides, ficaram assim como vocês, se perguntando por que com algumas medidas é possível construir um triângulo e outras não.
Imaginem que Euclides propôs essa tarefa para vocês, de descobrirem um jeito de identificar quais eram as medidas corretas. Olhem bem para os números, tentem descobrir algum padrão... Façam testes no papel, no GeoGebra. Registrem o que estão pensando.

Observações: Deixar que os alunos pensem e pedir para que registrem tudo na folha específica. Pode ser que ninguém chegue a resposta, mas observar bem as estratégias que estão utilizando.

Para a finalização desse momento haverá duas opções:

1) Se descobrirem os padrões nos números

Vocês foram muito bem nessa tarefa, fizeram uma descoberta incrível. É um descoberta importante porque é sobre a condição de existência de um triângulo, assim não é possível construir um triângulo com quaisquer medidas!
Para essa descoberta, Euclides escreveu a seguinte frase:

20. Em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.

2) Se não conseguirem fazer a descoberta

Imaginem que Euclides deu uma dica para vocês, para tentarem descobrir quando é possível construir um triângulo e quando não será. A dica é a seguinte: ao fazer operações de soma com esses números, dois a dois, podemos descobrir algo.

(Caso ainda não descubram)

O que tentamos descobrir foi sobre a condição de existência de um triângulo em que não é possível construir um triângulo com quaisquer medidas, existe um condição!
Sobre essa condição Euclides escreveu:

20. Em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior que o terceiro.

O que vocês entendem sobre essa frase?
Vamos verificar? Observem as medidas em que conseguiram construir um triângulo e aquelas que não foi possível construí-lo. Registrem!

Agora pensem e construam um triângulo escaleno com medidas diferentes daquelas já utilizadas. Registrem!

Muito bem alunos de Euclides! Vocês descobriram e aprenderam sobre conhecimentos que grandes matemáticos descobriram.

Estudamos nesse período, algumas ideias que Euclides escreveu sobre a Geometria, conhecimentos que estão presentes na formação de vocês.

Nesse tempo viajamos para alguns países e descobrimos a Matemática utilizada pelos povos antigos, uma Matemática que foi explicada na obra de Euclides chamada de “Elementos”.

Este trabalho foi composto na fonte Myriad Pro e Ottawa.
Impresso na Coordenadoria de Imprensa e Editora | CIED
da Universidade Federal de Ouro Preto,
em agosto de 2020
sobre papel 100% reciclato (miolo) 90g/m2 e (capa) 300 g/m2