



Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Método de Decomposição de Benders Generalizado para Seleção Estocástica de Portfólios

Bráulio Frances Barcelos

João Monlevade – MG, Dezembro de 2023

Bráulio Frances Barcelos

Método de Decomposição de Benders Generalizado para Seleção Estocástica de Portfólios

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Ouro Preto (Linha de Pesquisa: Modelagem de Sistemas Produtivos e Logísticos), como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

Universidade Federal de Ouro Preto

Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Orientador: Gilberto de Miranda Júnior

Coorientador: Thiago Augusto de Oliveira Silva

João Monlevade – MG

Dezembro de 2023

SISBIN - SISTEMA DE BIBLIOTECAS E INFORMAÇÃO

B242m Barcelos, Braulio Frances.

Método de decomposição de Benders generalizado para seleção estocástica de portfólios. [manuscrito] / Braulio Frances Barcelos. - 2023. 61 f.: il.: color., tab..

Orientador: Prof. Dr. Gilberto Júnior.

Coorientador: Prof. Dr. Thiago Silva.

Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Engenharia de Produção. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção.

1. Algoritmo - Conjunto Ativo. 2. Projeção em Caixa. 3. Decomposição de Benders Generalizado (DBG). 4. Processo Estocástico. I. Júnior, Gilberto. II. Silva, Thiago. III. Universidade Federal de Ouro Preto. IV. Título.

CDU 658.5

Bibliotecário(a) Responsável: Maristela Sanches Lima Mesquita - CRB-1716



FOLHA DE APROVAÇÃO

Bráulio Frances Barcelos

Método de Decomposição de Benders Generalizado para Seleção Estocástica de Portfólios

Dissertação apresentada ao **Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção** da Universidade Federal de Ouro Preto como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Engenharia de Produção**

Aprovada em 20 de Dezembro de 2023

Membros da banca

Prof. Dr. - Gilberto Miranda Junior - Orientador(a) - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Thiago Augusto Oliveira Silva - Co-orientador(a) - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Marcone Jamílson de Freitas Souza - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Alexandre Xavier Martins - Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. - Ricardo Saraiva de Camargo - Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. - Gilberto Miranda Junior, orientador do trabalho, aprovou a versão final e autorizou seu depósito no Repositório Institucional da UFOP em 19/01/2024.



Documento assinado eletronicamente por **Gilberto de Miranda Júnior**, PROFESSOR DE MAGISTERIO SUPERIOR, em 29/01/2024, às 17:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufop.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0660074** e o código CRC **5387D2F8**.

A Deus e a todas as pessoas que de alguma forma me auxiliaram nesta caminhada.

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, estiveram envolvidos nesta fase tão importante de minha vida. Também gostaria de agradecer aos meus amigos e familiares que me apoiaram nos momentos mais difíceis.

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças para superar todos os obstáculos ao longo dessa jornada, e por ter permitido a concretização deste grande sonho.

Agradeço especialmente ao Professor Dr. Gilberto de Miranda Júnior e ao Professor Dr. Thiago Augusto de Oliveira Silva pela dedicação e pela orientação deste trabalho.

Agradeço à Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por terem financiado esta pesquisa.

Agradeço especialmente aos meus pais, Eli e Aparecida, e aos meus irmãos, Wanderson e Elinéia, que sempre me apoiaram em todos os momentos da minha vida e nunca me deixaram desistir dos meus sonhos e objetivos.

E agradeço, de forma muito carinhosa, à minha esposa, Sabrina por toda paciência, carinho, amor e compreensão. Você foi como uma estrela guia a me impulsionar a ir mais longe.

*“O Senhor é meu Pastor e nada me faltará.”
– Salmos 23:1*

Resumo

Este trabalho aborda o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância. O problema contém um conjunto de ativos financeiros, no qual cada ativo possui um peso associado a sua escolha e um valor de retorno. O Retorno é obtido pela média dos retornos passados dos ativos ponderados pelos respectivos pesos. Outro parâmetro considerado no problema é o risco associado a cada ativo, obtido pela matriz variância-covariância. O objetivo é encontrar a melhor combinação dos ativos ponderados pelos pesos associados, buscando reduzir o risco e aumentar o retorno. Para resolver o problema eficientemente, foram utilizados os algoritmos **Conjunto Ativo** e o **Método de Projeção em Caixa**. Além disso, foi utilizada uma técnica de pré-processamento para redução do tamanho da instância. Também, foi proposta uma reformulação do problema, utilizando-se a versão estocástica do Método de Decomposição de Benders Generalizado. Resultados computacionais mostraram a superioridade do **Método de Projeção em Caixa** em relação ao **Algoritmo do Conjunto Ativo**. Capaz de resolver instâncias com até 1.200 ativos, o Método de Projeção em Caixa superou o Algoritmo do Conjunto Ativo em tempo de solução e número de iterações, sendo 83 vezes mais rápido que o Algoritmo do Conjunto Ativo considerando o pior caso. Adicionalmente, as soluções derivadas do Método de Projeção em Caixa foram confrontadas com aquelas geradas pelo resolvidor de Programação Quadrática do Gurobi. Os resultados revelaram que o maior desvio observado pelo Método de Projeção em Caixa foi da ordem de 10^{-9} . Além disso, o código do Método de Projeção em Caixa, quando integrado ao Método de Decomposição de Benders Generalizado, foi testado e comparado com o software *Gurobi* considerando uma instância composta por 50 ativos e 500 cenários. O Método de Projeção em Caixa apresentou tempos de solução inferiores em comparação com aqueles obtidos pelo resolvidor de Programação Quadrática do *Gurobi*.

Palavras-chaves: Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância. Algoritmo do Conjunto Ativo. Método de Projeção em Caixa. Método de Decomposição de Benders Generalizado.

Abstract

This work addresses the Mean-Variance Portfolio Selection Problem. The problem contains a set of financial assets, in which each asset has a weight associated with its choice and a return value. The Return is obtained by averaging the past returns of assets weighted by their respective weights. Another parameter considered in the problem is the risk associated with each asset, obtained by the variance-covariance matrix. The objective is to find the best combination of assets weighted by the associated weights, seeking to reduce risk and increase return. To solve the problem efficiently, the **Active Set** and **Box Projection Method** algorithms were used. Furthermore, a pre-processing technique was used to reduce the instance size. Also, a reformulation of the problem was proposed, using the stochastic version of the Generalized Benders Decomposition Method. Computational results showed the superiority of the **Box Projection Method** in relation to the **Active Set Algorithm**. Capable of solving instances with up to 1,200 assets, the Box Projection Method outperformed the Active Set Algorithm in solution time and number of iterations, being 83 times faster than the Active Set Algorithm considering the worst case. Additionally, the solutions derived from the Box Projection Method were compared with those generated by the Gurobi Quadratic Programming solver. The results revealed that the largest deviation observed by the Box Projection Method was of the order of 10^{-9} . Furthermore, the Box Projection Method code, when integrated with the Generalized Benders Decomposition Method, was tested and compared with the *Gurobi* software considering an instance composed of 50 assets and 500 scenarios. The Box Projection Method presented lower solution times compared to those obtained by *Gurobi's* Quadratic Programming solver.

Keywords: Mean Variance Portfolio Selection Problem. Active Set Algorithm. Box Projection Method. Generalized Benders Decomposition Method.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Equivalente Determinístico x Estocástico	25
---	----

Lista de tabelas

Tabela 1 – Trabalhos abordando o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância e suas características.	14
Tabela 2 – Conjuntos do modelo matemático	18
Tabela 3 – Parâmetros do modelo matemático.	18
Tabela 4 – Variáveis de Decisão 1º Estágio.	18
Tabela 5 – Variáveis de Decisão 2º Estágio.	19
Tabela 6 – Resultados Obtidos utilizando-se o Algoritmo do Conjunto Ativo e o Método de Projeção em Caixa	42
Tabela 7 – Precisão relativa entre o <i>GUROBI 10</i> e o Método de Projeção em Caixa (MPC) - 50 maiores desvios observados (entre 15.000).	44
Tabela 8 – <i>GUROBI 10 - Stand-alone</i> versus GBD. No primeiro grupo de resultados, subproblemas resolvidos pelo pacote comercial. No segundo, subproblemas resolvidos pelo Método de Projeção em Caixa (MPC).	45

Lista de abreviaturas e siglas

ACA	<i>Algoritmo do Conjunto Ativo</i>
AEST	<i>Abordagem Estocástica</i>
B&B	<i>Algoritmo Branch and Bound</i>
B&Cut	<i>Algoritmo Branch and Cut</i>
BFGS	<i>Algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno</i>
CPLEX	<i>Pacote Comercial de Software de Otimização Matemática</i>
DFP	<i>Algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell</i>
EDS	<i>Equação Diferencial Estocástica</i>
FO	<i>Função Objetivo</i>
GBD	<i>Generalized Benders Decomposition</i>
KKT	<i>Karush Khun-Tucker</i>
MB	<i>Movimento Browniano</i>
MDBG	<i>Método de Decomposição de Benders Generalizado</i>
MGB	<i>Movimento Geométrico Browniano</i>
MO	<i>Multiobjetivo</i>
MPC	<i>Método de Projeção em Caixa</i>
OR-Library	<i>Conjunto de dados de teste Problemas de Pesquisa Operacional (PO) – incluindo Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância</i>
PLIM	<i>Programação Linear Inteira Mista</i>
PMB	<i>Programa Mestre de Benders</i>
PNLIM	<i>Programação Não Linear Inteira Mista</i>
POMVCCR	<i>Problema de Otimização de Média-Variância com Cardinalidade Restrita</i>
PP	<i>Programação Paramétrica</i>

PQ	<i>Programação Quadrática</i>
PQIM	<i>Programação Quadrática Inteira Mista</i>
RL	<i>Revisão da Literatura</i>
S&P 500	<i>Índice de mercado de ações nos Estados Unidos, composto por 500 empresas de grande capitalização</i>
SPB	<i>Subproblema de Benders</i>

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Contribuições	4
1.3	Organização do Trabalho	5
2	REVISÃO DE LITERATURA	6
3	PROBLEMA ESTOCÁSTICO DE SELEÇÃO DE PORTFÓLIOS DE MÉDIA VARIÂNCIA EM DOIS ESTÁGIOS COM RESTRIÇÃO DE CARDINALIDADE	17
3.1	Notações e Definições	18
3.2	O Problema Estocástico de Seleção de Portfólios em Dois Estágios	19
3.2.1	Modelagem da Incerteza de Preços	26
3.2.2	Criação do conjunto de parâmetros do problema	28
3.2.2.1	Regularização de $\hat{Q}_s \{S, N, N\}$	29
4	MÉTODOS DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA	31
4.1	Método do Conjunto Ativo Primal	33
4.2	Método de Projeção em Caixa Primal	35
4.3	Resolvendo o Sistema KKT	36
4.4	Lidando com Degeneração e Ciclagem	38
5	EXPERIMENTOS DE COMPUTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS	40
5.1	Planejamento Experimental	40
5.2	Avaliando a Escalabilidade do Resolvedor de Subproblemas	41
5.3	Avaliando a Precisão do Resolvedor de Subproblemas contra o <i>GUROBI 10</i>	43
5.4	Testando o Método de Decomposição de Benders Generalizado contra o <i>GUROBI 10</i>	45
6	CONCLUSÕES E PESQUISA FUTURA	47
6.1	Conclusões	47
6.2	Pesquisa Futura	48
	REFERÊNCIAS	49

1 Introdução

A Seleção de Portfólios desempenha um papel fundamental no campo das finanças, visando alocar recursos para maximizar o retorno esperado e minimizar o risco associado. O modelo de Seleção de Portfólios de Média-Variância, proposto por [Markowitz \(1952a\)](#), é amplamente reconhecido e utilizado na gestão de carteiras de investimentos. Este modelo visa otimizar a combinação de ativos financeiros, atribuindo pesos que maximizem o retorno esperado, ao mesmo tempo, em que minimizam o risco do investimento. Essa otimização é realizada utilizando a matriz de Variância-Covariância entre os ativos, a qual avalia a diversificação do Portfólio e o risco associado a cada ativo.

No modelo de Seleção de Portfólios de Média-Variância, cada ativo é atribuído a um peso específico, e o retorno esperado é determinado como a média ponderada dos retornos de todos os ativos na carteira. Simultaneamente, os riscos associados a cada ativo são expressos através da matriz de Variância-Covariância entre os ativos.

A utilização do modelo de [Markowitz \(1952a\)](#) traz vários benefícios para a gestão de carteiras de investimentos, incluindo:

- a) Diversificação:** o modelo de Markowitz ajuda a identificar a combinação de ativos financeiros que oferece o melhor equilíbrio entre risco e retorno, considerando a matriz de covariância entre os ativos. Isso permite diversificar o portfólio e reduzir o risco total do investimento;
- b) Otimização:** o modelo permite uma abordagem sistemática para a seleção de ativos financeiros, levando-se em consideração tanto o retorno esperado quanto o risco associado. Dessa forma, é possível otimizar a seleção de ativos para maximizar o retorno esperado, com um nível de risco aceitável;
- c) Análise de risco:** o modelo de Markowitz é amplamente utilizado para análise de risco, permitindo avaliar o impacto de diferentes cenários econômicos e financeiros no desempenho do portfólio. Isso ajuda os investidores a tomar decisões mais assertivas e reduzir o impacto de eventos imprevisíveis;

- d) Gestão de carteiras:** o modelo de Markowitz é uma ferramenta essencial para a gestão de carteiras de investimentos, permitindo aos gestores de fundos e outros profissionais do mercado financeiro construir carteiras diversificadas e otimizadas, com base em uma abordagem matemática rigorosa;
- e) Melhoria do desempenho:** ao identificar a combinação ideal de ativos financeiros para maximizar o retorno esperado e minimizar o risco, o modelo de Markowitz pode ajudar a melhorar o desempenho geral do portfólio de investimentos.

Adicionalmente, diversas aplicações possibilitam a utilização do modelo de [Markowitz \(1952a\)](#) tais como:

- a) Gestão de carteiras de investimentos:** o modelo de Markowitz é amplamente utilizado para a gestão de carteiras de investimentos, permitindo aos gestores de fundos de investimento e a outros profissionais do mercado financeiro a construção de carteiras que buscam maximizar o retorno esperado e minimizar o risco associado.
- b) Análise de risco:** o modelo de [Markowitz \(1952a\)](#) também é usado para análise de risco em diversos setores, como seguros, imobiliário e commodities. Através da análise de risco, é possível avaliar o impacto de diferentes cenários no desempenho dos ativos financeiros e tomar decisões mais assertivas;
- c) Otimização de portfólios de projetos:** o modelo de Markowitz também pode ser aplicado em outras áreas além da financeira, como em gerenciamento de projetos. Nesse contexto, o modelo pode ser utilizado para a seleção de portfólios de projetos, buscando maximizar o retorno esperado e minimizar o risco;
- d) Alocação de recursos em empresas:** o modelo de Markowitz pode ser aplicado para a alocação de recursos em empresas, buscando maximizar o retorno esperado e minimizar o risco associado. Nesse contexto, a abordagem pode ser utilizada para selecionar os investimentos mais promissores e reduzir a exposição a ativos de alto risco.

No entanto, esse modelo apresenta limitações importantes, como a não consideração da incerteza na estimativa dos parâmetros envolvidos, tais como, a média e a covariância dos ativos financeiros, além de restrições comuns no mundo real, como limites na cardinalidade da carteira, limites nos valores mínimo e máximo de cada ativo além de custos de transação.

Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo geral mostrar como a consideração da incerteza pode levar a um portfólio de maior retorno e de risco mínimo no modelo de Seleção de Portfólios de Média-Variância. Para isso, será utilizada a formulação de programação estocástica do Método de Decomposição de Benders Generalizado em dois estágios apresentada por [Bagajewicz e Manousiouthakis \(1991\)](#) para o modelo proposto por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#). Além disso, são propostas estratégias para redução do tamanho da matriz de Variância-Covariância e implementados algoritmos eficientes para resolver os subproblemas desse método em dois estágios.

Embora haja uma vasta literatura sobre Seleção de Portfólios com diferentes variantes do modelo de [Markowitz \(1952a\)](#), pouco material aborda extensões de Programação Estocástica dessa importante classe de modelos. Isso representa uma lacuna na literatura que deve ser preenchida, já que a consideração da incerteza é fundamental para uma tomada de decisão mais eficiente em mercados financeiros, cada vez mais complexos e voláteis.

Dessa forma, a motivação deste trabalho é justificada pela necessidade de uma abordagem mais realista para a Seleção de Portfólios, considerando a incerteza dos parâmetros envolvidos e permita a construção de portfólios mais eficientes.

Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é comparar diferentes ferramentas para a solução do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância, proposto por [Markowitz \(1952a\)](#) levando-se em consideração a presença de incerteza. Além disso, será proposta uma abordagem estocástica, combinada com o Método de Decomposição de Benders Generalizado em dois Estágios, utilizando-se uma função de reação para cenários distintos. Com isso, a presente pesquisa busca responder à seguinte questão: quais técnicas de otimização são mais adequadas para a resolução eficiente do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância em um cenário de incerteza?

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é mostrar como a consideração da incerteza para o modelo de Seleção de Portfólios de Média-Variância permite obter um portfólio de maior retorno e de risco mínimo. Para atingir o objetivo geral estabelecido, adotam-se como objetivos específicos, os que seguem:

- Apresentar a formulação de programação estocástica do Método de Decomposição de Benders Generalizado em dois estágios para o modelo de Média-Variância proposto por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#);
- Propor estratégias para redução do tamanho da matriz de Variância-Covariância;
- Implementar algoritmos eficientes para resolver os subproblemas do Método de Decomposição de Benders em dois estágios para o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância;
- Implementar os algoritmos utilizando-se a linguagem *Python*;
- Comparar os resultados dos algoritmos implementados com os disponíveis na literatura.

1.2 Contribuições

O presente trabalho contribui para a evolução dos estudos relacionados à área de pesquisa operacional, porque apresenta algoritmos eficientes para resolução do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância e propõe a reformulação do problema através da versão estocástica do Método de Decomposição de Benders Generalizado. Dentre as principais contribuições podem-se destacar:

- A apresentação de uma técnica de pré-processamento para tratamento da instabilidade numérica dos dados;
- A implementação do Algoritmo do Conjunto Ativo para o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância;
- A implementação do Método de Projeção em Caixa para o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância.

1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. No Capítulo 1 apresentam-se uma breve introdução sobre o Problema de Seleção de Portfólios, as principais contribuições e a definição dos objetivos geral e específicos. O Capítulo 2 constitui-se de uma revisão de literatura sobre o Problema de Seleção de Portfólios, com enfoque em técnicas de otimização, mais especificamente, versão estocástica do Método de Decomposição de Benders em dois estágios, Método de Projeção em Caixa e Algoritmo do Conjunto Ativo. O Capítulo 3 descreve o modelo matemático proposto por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#) e propõe a sua reformulação, a partir da utilização da versão estocástica do Método de Decomposição de Benders Generalizado, proposto por [Bagajewicz e Manousiouthakis \(1991\)](#) em dois estágios. O Capítulo 4 mostra as técnicas utilizadas para o pré-processamento e a execução do Algoritmo do Conjunto Ativo e do Método de Projeção em Caixa. No Capítulo 5 apresentam-se os resultados obtidos durante o desenvolvimento do trabalho e as principais discussões sobre o tema proposto. O Capítulo 6 trata das considerações finais e apresenta propostas para pesquisas futuras.

2 Revisão de Literatura

Um dos primeiros trabalhos envolvendo o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância foi publicado por [Markowitz \(1952b\)](#) em seu artigo seminal intitulado *Portfolio Selection*. A partir disso, surgiram vários estudos sobre o tema, utilizando diversas técnicas de solução para o referido problema. Nesse contexto, existem duas possibilidades para resolução desse problema: métodos exatos e métodos heurísticos. Os métodos exatos referem-se ao procedimento que encontra a solução ótima para o problema; já os métodos heurísticos tratam de procedimento que não garante a solução ótima do problema, mas garante resultado viável, como atestam [Coffin e Saltzman \(2000\)](#) e [Gomes \(2011\)](#). Devido à complexidade do problema, a maioria das pesquisas desenvolvidas nessa área, se concentraram na utilização de técnicas heurísticas. Essas técnicas podem ser observadas nos trabalhos de [Anagnostopoulos e Mamanis \(2011\)](#), [Chang et al. \(2000\)](#) e [Fernández e Gómez \(2007\)](#).

Em relação à escolha das abordagens, a Tabela 1, apresentada neste capítulo, destaca uma compilação de autores e obras pesquisados que desenvolveram propostas metodológicas em cada direção. Por exemplo, [Bagajewicz e Manousiouthakis \(1991\)](#), [Binstock \(1996\)](#) e [Canakgoz e Beasley \(2009\)](#) desenvolveram técnicas de solução utilizando abordagens exatas, enquanto [Chang et al. \(2000\)](#) e [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2009\)](#) optaram por abordagens heurísticas.

Relativamente ao objeto de interesse desta pesquisa, ou seja, a resolução do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância, levantou-se um número extenso de trabalhos que se desenvolveram para propor soluções eficientes nesse mesmo sentido. Na sequência, apresentam-se os principais pesquisadores e suas respectivas contribuições para o estudo de Portfólios de Média-Variância.

[Borchers e Mitchell \(1994\)](#) desenvolveram um algoritmo *branch-and-bound*, aprimorado para programação não linear inteira mista. O algoritmo proposto utiliza a programação quadrática para resolver os subproblemas, além disso, usa heurística para identificar subproblemas que apresentam soluções não inteiras, quando são detectados, realiza-se a divisão em dois novos subproblemas. Resultados computacionais mostraram que a heurística proposta reduz significativamente os tempos de solução em determinadas instâncias.

Por sua vez, [Bienstock \(1996\)](#) apresentou uma experiência computacional, utilizando o algoritmo *branch-and-cut*, para resolver problemas de programação quadrática em que existe um limite superior sobre o número de ativos a serem escolhidos. Resultados computacionais mostraram que o algoritmo proposto resolve problemas reais em pouco tempo de processamento.

No estudo de [Bomze \(1998\)](#), o autor propôs uma reformulação contínua do problema de clique de peso máximo em grafos não direcionados como um problema de programação quadrática padrão. Resultados computacionais apontaram que a reformulação proposta, melhora significativamente a estabilidade numérica, além disso, mostra-se capaz de resolver problemas de grandes dimensões.

Considerando o estudo de [Chang et al. \(2000\)](#), os autores estenderam o modelo padrão de otimização de portfólio de Média-Variância, acrescentando restrições de cardinalidade e colocando limites na quantidade investida em determinado ativo. Os autores apresentaram três heurísticas baseadas em algoritmo genético, simulated annealing e busca tabu para encontrar a fronteira eficiente com restrição de cardinalidade. Realizaram testes computacionais com cinco conjuntos de dados contendo até 225 ativos.

Já [Crama e Schyns \(2003\)](#) utilizaram o *simulated annealing* para o modelo de programação quadrática inteira mista do Problema de Seleção de Portfólios. Resultados computacionais mostraram que o algoritmo proposto encontrou boas aproximações de Média-Variância para problemas de tamanho médio em tempos computacionais aceitáveis.

Por sua vez, [Ledoit e Wolf \(2004\)](#) propuseram um modelo de risco para otimização de Média-Variância no contexto do gerenciamento de portfólio. Os autores sugeriram usar a matriz obtida a partir da matriz de covariância da amostra, por meio de uma transformação chamada encolhimento. Os autores mostraram que o encolhimento reduz o erro de rastreamento considerando um índice de referência e aumenta o índice de informações realizadas do gerenciamento dos ativos do portfólio.

No modelo de [Konno e Koshizuka \(2005\)](#), os autores pesquisaram o modelo de otimização de portfólio do Desvio médio absoluto para tratar problemas de otimização de portfólio de grande escala. Tal problema consiste em minimizar o risco do portfólio, utilizando o desvio médio absoluto da taxa de retorno, diferentemente do modelo padrão de Markowitz, que utiliza a variância como medida de risco. A partir das características computacionais e do ponto de vista matemático, o modelo de desvio médio absoluto pode ser reduzido a um problema de programação linear, enquanto o modelo padrão é reduzido a um problema de programação quadrática convexa. Resultados computacionais mostraram que o modelo de desvio médio absoluto apresentou resultados superiores ao modelo padrão de Markowitz, levando-se em consideração características teóricas e computacionais. O modelo proposto foi resolvido com instâncias no intervalo de tempo prático.

Já no trabalho de [Fernández e Gómez \(2007\)](#), os autores desenvolveram um método heurístico baseado na rede neural HopField para resolver uma generalização do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância e o compararam com algoritmo genético, busca tabu e recozimento simulado. Resultados computacionais mostraram que, considerando todos os tipos de investimento, nenhum método heurístico superou os demais. Porém, ao lidar com instâncias que necessitam de diversificação de portfólios de baixo risco de investimento, o modelo de rede neural de HopField apresentou melhores soluções quando comparado com os três métodos heurísticos citados.

[Chiam, Tan e Mamum \(2008\)](#) propuseram uma otimização de portfólio multiobjetivo para o problema de Média-Variância padrão, englobando restrições realistas e critérios de preferência. Resultados computacionais apontaram que o método proposto encontrou melhores aproximações da fronteira eficiente, considerando-se proximidade e diversidade em relação a outras representações convencionais.

Já no trabalho de [Bertsimas e Shioda \(2009\)](#), os autores descreveram um procedimento heurístico combinado com o método *branch-and-bound* e o método de *Lemke's*, para resolução de Problemas de Otimização quadrática com cardinalidade restrita em regressão e otimização de portfólios. Os testes computacionais mostraram que a abordagem proposta obteve melhores resultados quando comparados com o CPLEX. Em relação à seleção do subconjunto de variáveis, o método teve melhor ajuste do que a heurística de regressão direta considerando-se um tempo de 60 segundos. Adicionalmente, os métodos de *branch-and-bound* e *Lemke's* apresentaram tempos de execução significativamente mais rápidos, quando comparados ao método de barreira para resolver problemas de otimização contínua.

No trabalho de [Branke et al. \(2009\)](#), os autores utilizaram um algoritmo evolutivo multiobjetivo (MOEA) para criar os subconjuntos convexos dos portfólios viáveis, resolveram o algoritmo de linha crítica de Markowitz para cada subconjunto e mesclaram as soluções parciais para o conjunto não convexo original. Resultados computacionais com as instâncias benchmark da OR-Library¹, com até 225 ativos, mostraram a eficiência do algoritmo proposto, superando os MOEA'S existentes.

Por sua vez, [Canakgoz e Beasley \(2009\)](#) apresentaram a formulação de programação linear inteira mista para o problema de reproduzir o desempenho de um índice do mercado de ações. Nessa formulação, foram considerados os custos de transação, restrição que define o número de ações a serem compradas e um limite no custo total de transação. Para resolver as formulações, foi utilizado o pacote comercial CPLEX, considerando oito conjunto de dados, em que o maior conjunto testado possuía 2.000 ações.

¹ OR-Library é uma coleção de conjuntos de dados de teste para uma variedade de problemas de Pesquisa Operacional (OR) – incluindo o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância. Foi originalmente descrita em [JEBeasley, "OR-Library: distributing test problems by electronic mail", Journal of the Operational Research Society 41\(11\) \(1990\) pp1069-1072.](#)

No estudo de [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2009\)](#), os autores desenvolveram um novo método para resolução do modelo de Markowitz com ativos limitados, considerando-se restrições de cardinalidade e quantidade, além disso, propuseram uma reformulação como um problema quadrático padrão baseado em resultados dos dois últimos autores. A partir dos testes realizados, foram encontradas soluções ótimas de alguns problemas benchmark que ainda não foram resolvidas, as quais estão disponíveis na biblioteca OR de Beasley. Adicionalmente, também foram realizados testes para cinco conjuntos de dados reais, utilizando o modelo de ativos limitados. Resultados computacionais apontaram que o modelo proposto encontrou melhores soluções quando comparado com o modelo clássico de Markowitz. O algoritmo conseguiu resolver instâncias com mais de 2.000 variáveis.

O trabalho de [Gulpinar, An e Moeini \(2010\)](#) consistiu em estender a estrutura do modelo de Markowitz, incorporando restrições discretas de limite, *Buy-in* e cardinalidade. Os autores utilizaram uma abordagem exata de otimização baseada na programação de funções convexas e resolveram o problema robusto de otimização de portfólios de Média-Variância min-max com até 98 ativos.

No trabalho de [Hirschberger, Qi e Steuer \(2010\)](#), os autores propuseram um procedimento de programação quadrática paramétrica para uso mais eficaz em aplicações de larga escala. Os resultados computacionais, mostraram que o método proposto conseguiu solucionar a construção da fronteira eficiente para matrizes densas, na faixa de 1.000 a 3.000 ativos.

No estudo proposto por [Anagnostopoulos e Mamanis \(2011\)](#), os autores compararam o algoritmo genético Niched Pareto 2 (NPGA2), algoritmo genético de ordenação não dominada II (NSGAI) , algoritmo de seleção baseado em envelope de Pareto (PESA), algoritmo evolucionário de força de Pareto 2 (SPEA2) e *e-multiobjective algoritmo evolutivo* (e-MOEA). Os experimentos foram realizados utilizando-se um conjunto de instâncias variando de 31 a 225 ativos, para esse conjunto de dados, o algoritmo SPEA2 mostrou superioridade em relação aos demais. E por fim, o NSGA-II e SPEA2 apresentaram melhor desempenho para instâncias de grande escala do Problema de Otimização de Média-Variância com cardinalidade Restrita (*POMVCCR*), considerando-se o conjunto de dados com até 2.196 ativos.

Já [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#) propuseram uma nova abordagem para resolução do modelo de ativos limitados de Markowitz, em que os ativos são limitados por restrição de quantidade e cardinalidade. Reformularam o problema como um problema quadrático padrão em um limite inferior e resolveram instâncias de pequeno porte com um algoritmo exato. Para instâncias maiores, os autores utilizaram procedimento heurístico eficiente e testaram o método proposto com cinco conjuntos de dados para índices de mercado de capitais reais, obtendo melhores resultados quando comparado com o CPLEX e com abordagens heurísticas recentes da literatura.

Por sua vez, He e Qu (2014) propuseram uma abordagem híbrida para o Problema de Seleção de Portfólios, utilizando uma abordagem estocástica para a formulação de programação inteira mista com dois estágios com recurso. Nesse modelo, as restrições são modeladas como um programa inteiro misto, enquanto as variáveis de decisão são incorporadas no 2º estágio como variáveis de recurso. Os autores aplicaram um método de simplificação que visa retirar restrições difíceis do modelo, obtendo subproblemas fáceis quando comparados ao original. O método híbrido combina busca local com o *branch-and-bound* para resolver o problema heurísticamente. Os resultados obtidos mostraram que o método híbrido conseguiu gerar boas soluções em um tempo computacional razoável.

Já no trabalho de Jin, Qu e Atkin (2016), os autores estudaram os modelos de otimização restritos de última geração e utilizaram um solucionador exato para identificar soluções ótimas ou limites inferiores considerando instâncias de referência da biblioteca OR com restrições estendidas. Os autores testaram os efeitos das restrições de pré-atribuição, lote de rodadas e classe para o modelo de Markowitz, com base nas restrições de cardinalidade e quantidade. Adicionalmente, analisaram diversas configurações de restrição, considerando-se também as mais estudadas na literatura. A partir dos resultados encontrados, constataram que tanto as restrições de pré-atribuição lote circular quanto as de classe não apresentaram grande impacto no custo de resolver o problema com restrição de cardinalidade e de quantidade. Adicionalmente, a restrição de cardinalidade é a mais utilizada na literatura, a adição dessa restrição aumenta a complexidade de resolução do modelo. Os autores salientam que o aumento de configurações específicas sobre essa restrição pode neutralizar o efeito sobre a restrição de cardinalidade e obter soluções ótimas de forma mais fácil.

Já no trabalho de Hardoroudi et al. (2017), os autores propuseram uma nova abordagem para reformular o Problema de Seleção de Portfólios com restrição de cardinalidade como um problema de programação linear inteira mista. A partir dos testes numéricos realizados, foram encontradas carteiras de variância mínima restritas de cardinalidade de ações S&P² 500. Os resultados encontrados tiveram uma melhor performance, quando comparados com os resultados obtidos usando o modelo de Programação Quadrática inteira Mista.

² S&P500 é um índice de mercado de ações nos Estados Unidos, composto por 500 empresas de grande capitalização, abrangendo diversos setores. É um indicador importante do desempenho do mercado acionário e amplamente utilizado como referência para medir o desempenho de investimentos em ações. Sua construção é baseada no valor de mercado das empresas componentes sendo ajustado periodicamente para refletir mudanças no valor das ações e na estrutura do mercado. O S&P 500 é uma ferramenta fundamental de análise e de referência para investidores, acadêmicos e profissionais do setor financeiro.

No trabalho de [Cesarone, Moretti e Tardella \(2018\)](#), os autores apresentaram uma abordagem diferente do modelo clássico de Markowitz, em que a escolha da carteira ativos é baseada em um tamanho preestabelecido de ativos, com o menor risco possível, ou seja, definem a priori o número k de ativos a serem considerados na carteira, diferentemente dos trabalhos anteriores em que a escolha dos ativos é realizada de forma aleatória. A partir dos testes realizados, eles constataram que carteiras de menor risco não demandam mais do que 15 ativos e quase sempre é possível encontrar carteiras que são apenas 1% mais arriscadas do que as carteiras de menor risco e não contém mais de 10 ativos.

No estudo de [Kwan \(2018\)](#), a autora dedicou-se a investigar o efeito da relaxação da definição positiva da matriz de covariância, e descobriu que a versão do modelo de Markowitz com as restrições de proibição de vendas a descoberto e alocação total de fundos de investimentos é mais eficiente quando comparada com os modelos anteriores. Além disso, autora também constatou que, se a matriz de covariância for baseada em observações de retorno insuficientes, a invertibilidade da matriz aumentada exige que o número de títulos selecionados recebendo proporções não vinculativas de fundos de investimento não exceder um determinado máximo, sendo possível relaxar o requisito de definitividade positiva da matriz.

[Sun et al. \(2019\)](#) desenvolveram uma revisão da literatura sobre as características dos dados financeiros e consideraram os modelos mais usados de Seleção de Portfólios e medição de risco de Portfólios. A partir dos resultados obtidos, os autores destacaram dois modelos de Seleção de Portfólios importantes, o modelo de Média-Variância e variância mínima global, em que o risco da carteira é medido pela matriz de covariância.

Já [Nystrup et al. \(2019\)](#) utilizaram um modelo preditivo para otimizar dinamicamente um portfólio e controlar os rebaixamentos. O controle é baseado em previsões multiperíodo da média e covariância dos retornos financeiros do modelo multivariado de Markov, com parâmetros variantes no tempo. A abordagem proposta da Seleção de Portfólios multiperíodo baseada no modelo preditivo controlou com sucesso os rebaixamentos da eficiência de média variância. A combinação da alavancagem e do controle de rebaixamento permitiu aumentar o retorno excedente em várias centenas de pontos básicos.

No trabalho de [Gulliksson e Mazur \(2020\)](#), os autores desenvolveram um método iterativo baseado em sistemas de segunda ordem que resolve aproximadamente o problema de hierarquia linear deficiente para a Seleção de Portfólios com matriz de covariância singular. Além disso, os autores propuseram uma solução numérica que pode ser escolhida entre as iteradas, que equilibram o tamanho do portfólio e o risco. Testes computacionais utilizando carteira com retornos reais listados no S&P500³, confirmam que o método apresenta boas propriedades de convergência, obtendo melhores soluções que as baseadas em métodos restritos de norma mínima Moore-Penrose, Lasso e ingênuos de igual peso.

Por sua vez, [Callot et al. \(2021\)](#) desenvolveram uma análise de variância, dos pesos e o risco de grandes carteiras de Portfólio, como consequência, construíram um estimador da inversa da matriz de covariância do excesso de retorno de ativos. Testes computacionais mostraram que o estimador criado, forneceu melhores resultados quando comparados tanto com o modelo de fator quanto com o modelo de *Shrinkage*.

No estudo de [Deng e Huang \(2021\)](#), os autores desenvolveram um estudo sobre a condição de equivalência da matriz de covariância definida positiva, para isso utilizaram a teoria matricial na faixa de valor de risco da carteira e igual peso e carteira ótima. Os resultados obtidos foram indicados pelo uso de provas matemáticas rigorosas da teoria das matrizes e por quatro exemplos numéricos empregados para verificar a validade dos lemas e teoremas propostos. Adicionalmente, eles demonstraram que a definitividade positiva da matriz de covariância, que fornece uma demonstração teórica significativa para a teoria das carteiras.

[Geoffrion \(1972\)](#) desenvolveu o Método de Decomposição Generalizado que representa uma extensão da abordagem original proposta por Benders. Esta abordagem ampliada permite resolver uma classe mais abrangente de problemas de programação matemática que envolvem variáveis complicantes, não necessariamente restritas a um programa linear. Além disso, o autor apresentou uma especialização para o problema de programação de fator variável, que ilustra uma instância em que o programa não é côncavo, mas pode ser resolvido por técnicas de programação côncava.

³ S&P500 é um índice de mercado de ações nos Estados Unidos, composto por 500 empresas de grande capitalização, abrangendo diversos setores. É um indicador importante do desempenho do mercado acionário e amplamente utilizado como referência para medir o desempenho de investimentos em ações. Sua construção é baseada no valor de mercado das empresas componentes sendo ajustado periodicamente para refletir mudanças no valor das ações e na estrutura do mercado. O S&P 500 é uma ferramenta fundamental de análise e de referência para investidores, acadêmicos e profissionais do setor financeiro.

Já no trabalho de [Bagajewicz e Manousiouthakis \(1991\)](#), os autores desenvolveram uma análise para solução de problemas não convexos, utilizando diferentes implementações do Método de Benders Generalizado. Em determinadas situações foram obtidos somente mínimos locais, já em outras, não foi possível encontrar convergência para o método. Por fim, foi demonstrado que na presença do *gap dual* uma implementação particular da Decomposição de Benders Generalizado pode fornecer limites superiores e inferiores no ótimo global.

A Tabela 1 é um resumo dos principais autores e características do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância, proporcionando uma visão geral do problema em estudo. Essa Tabela desempenha um papel importante, porque permite visualizar facilmente os pesquisadores-chave e suas respectivas contribuições, além de auxiliar na compreensão das diversas abordagens e das características relacionadas a esse problema.

Além disso, a Tabela 1 inclui o modelo proposto neste trabalho, em que se destacam suas principais características e contribuições, as quais o diferenciam dos modelos existentes na literatura até o momento. Isso permite obter uma compreensão abrangente das inovações introduzidas, em particular, por esta pesquisa e como elas se comparam às abordagens existentes.

Tabela 1 – Trabalhos abordando o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância e suas características.

Autor(ano)	Técnica de Solução	Tipo de Formulação	Restrição de Cardinalidade	Restrição Quantidade-Buy-in
Bienstock (1996)	Exata - <i>B&Cut</i>	PQIM	✓	✗
Canakgoz e Beasley (2009)	Exata - <i>B&B</i>	PLIM	✓	✗
Gulpinar, An e Moeini (2010)	Exata Programação de Funções Convexas	PLIM	✓	✓
Hirschberger, Qi e Steuer (2010)	Exata	PP	✗	✗
Jin, Qu e Atkin (2016)	Exata RL-Modelo de Markowitz	PQ	✓	✓
Hardoroudi et al. (2017)	Exata- CPLEX	PLIM	✓	✗
Callot et al. (2021)	Exata Estimador Matriz de Covariância	Matriz de Covariância	✓	✗
Bomze (1998)	Método Evolutivo	PQ	✓	✗
Borchers e Mitchell (1994)	Híbrido	PNLIM	✗	✗
Chang et al. (2000)	Heurística	PQ	✓	✓
Crama e Schyns (2003)	Heurística	PQIM	✓	✗
Ledoit e Wolf (2004)	Heurística- Encolhimento da Matriz de Covariância	PQ	✓	✗
Fernández e Gómez (2007)	Heurística	PQIM	✓	✗
Chiam, Tan e Mamum (2008)	MO Restrições Realistas e Critérios de preferência	PQ	✓	✗
Bertsimas e Shioda (2009)	Heurística - <i>B&B</i> e <i>Método de Lemke's</i>	PQ	✓	✗
Branke et al. (2009)	<i>MO-E-MOEA (Envelopes)</i>	PQ	✓	✗
Cesarone, Scozzari e Tardella (2009)	Heurística	PQ	✓	✓
(ANAGNOSTOPOULOS; MAMANIS, 2011)	<i>MO - Algoritmos Evolucionários</i>	PQ	✓	✓
Anagnostopoulos e Mamanis (2011)	<i>MO - Algoritmos Evolucionários</i>	PQ	✓	✗
Cesarone, Scozzari e Tardella (2013)	<i>Método Exato e Heurística</i>	PQ	✓	✓
Cesarone, Moretti e Tardella (2018)	<i>Método Exato - ativos definidos a priori</i>	PQ	✓	✗
Kwan (2018)	<i>Método Crítico de Markowitz</i>	PQ	✗	✗
Sun et al. (2019)	<i>RL - Modelos mais usados e Medição de Risco</i>	PQ	✓	✓
Nystrup et al. (2019)	<i>Método Dinâmico - Modelo Preditivo</i>	PQ	✗	✗
Gulliksson e Mazur (2020)	<i>Heurística</i>	PQ	✗	✗
Deng e Huang (2021)	<i>Abordagem Teórica - Teoria Matricial</i>	<i>Teoria Matricial</i>	✗	✗
He e Qu (2014)	<i>AEST busca local e B&B</i>	<i>PLIM-FO Linear</i>	✓	✗
Este trabalho (2023)	<i>AEST-MDBG em Dois Estágios</i>	<i>PNLIM-FO Quadrática</i>	✓	✓

Fonte: Os Autores (2023).

A inclusão do modelo proposto denominado *AEST-MDBG em Dois Estágios*, caracterizado pela formulação de *PNLIM-FO Quadrática*, apresentado na Tabela 1, ressalta a originalidade e o seu valor, fornecendo um contexto claro para a compreensão do trabalho desenvolvido nesta dissertação.

Diferentemente dos modelos já estudados na literatura, o modelo proposto apresenta as seguintes características adicionais:

1. Formulação de Programação Estocástica do Método de Decomposição de Benders Generalizado em dois estágios para o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância proposto por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#);
2. Possui Função Quadrática;
3. Apresenta função de reação (Função de Previsão) considerando-se vários cenários separados incorporando incerteza;
4. Considera Restrições de Cardinalidade e Quantidade (*Buy-in*)⁴

É importante ressaltar que o modelo proposto, de natureza estocástica, possui características distintas que contribuem para a eficiência do processo de Seleção de Portfólios. Especificamente, a construção dos dados de entrada, como o Retorno Médio e a Matriz de Variância-Covariância, desempenha um papel fundamental nesse contexto.

A construção do Retorno Médio é realizada com base em dados históricos dos ativos considerados, utilizando-se técnicas de cálculo da média. Essa abordagem considera o desempenho passado dos ativos, permitindo uma estimativa do retorno esperado em um horizonte futuro.

Por sua vez, a construção da Matriz de Variância-Covariância considera a sazonalidade presente nos dados. Essa matriz é composta pelos elementos de variância e covariância entre os ativos, refletindo a relação de interdependência entre eles. Essa abordagem permite avaliar o grau de correlação entre os ativos, o que é fundamental para a diversificação do portfólio e a redução do risco.

⁴ A restrição *Buy-in* nos mercados financeiros impõe a obrigação de adquirir ativos em caso de falha na entrega, garantindo o pagamento ou substituição adequada pela posição acordada. A parte responsável pela falta de entrega deve recomprar o ativo no mercado aberto, evitando perdas adicionais e assegurando a integridade e eficiência do mercado. Essa restrição promove a conclusão justa das transações e o cumprimento de obrigações contratuais.

Além disso, a função de reação considera vários cenários, levando-se em conta a incerteza presente no modelo. Essa função permite que o investidor construa um portfólio mais eficiente, observando-se diferentes possibilidades e probabilidades associadas aos retornos dos ativos. Isso ajuda a lidar com a incerteza inerente aos mercados financeiros e permite uma tomada de decisão mais assertiva e adaptável.

Resumindo, as características estocásticas do modelo proposto proporcionam uma abordagem mais abrangente e realista para a Seleção de Portfólios. A construção dos dados de entrada, como o Retorno Médio e a Matriz de Variância-Covariância, juntamente com a consideração de múltiplos cenários, permite ao investidor construir um portfólio mais eficiente, levando-se em conta a incerteza inerente ao modelo. Essas características são essenciais para uma melhor compreensão dos riscos e das oportunidades associados ao processo de Seleção de Portfólios.

3 Problema Estocástico de Seleção de Portfólios de Média Variância em Dois Estágios com restrição de cardinalidade

Este capítulo introduz o problema objeto de pesquisa nesta dissertação por meio da formulação do modelo de Seleção de Portfólios com restrições de cardinalidade, proposta por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#), bem como sua reformulação para programação estocástica, incluindo as incertezas nos vetores de retorno e nas matrizes de Variância-Covariância, adotando como técnica de solução o Método de Decomposição de Benders Generalizado. O objetivo central do trabalho aqui desenvolvido é construir um programa estocástico que permita aumentar a utilidade do modelo clássico de Markowitz, tornando-o um pouco mais adaptado às altas velocidades de mudança de cenário de investimento. Uma série de hipóteses de modelagem deve então ser arrolada, para que se possa ter a dimensão da contribuição científica e da superioridade da abordagem desenvolvida, se compara às variantes determinísticas disponíveis.

As principais motivações para a proposição de tal variante estocástica do modelo de Markowitz vem da impossibilidade de assegurar que os dados observados no passado sejam capazes de representar retornos e volatilidades futuras, assim como o valor intrínseco da pré-computação de uma *função de reação*, que poderia ser implementada com o auxílio de sistemas de aquisição, monitoramento e análise de dados em um ambiente de *janela rolante*, o que reduziria sensivelmente a exposição a riscos associados aos erros de previsão e permitiria obter o retorno desejado sobre o portfólio a riscos efetivos mais baixos, como se pretende demonstrar empiricamente com o auxílio de experimentos preliminares.

A base do esforço de modelagem é o uso de duas variáveis de controle/reação, w e y , escritas para cada um dos cenários propostos, para o vetor de retorno r e a matriz de volatilidade (variância/covariância) Q . Tais variáveis devem implementar uma política de controle estabilizante, preservando o retorno mínimo médio esperado do portfólio e assegurando assim o cumprimento de contratos, bem como garantir que o limite de investimento, isto é, que o volume total de capital alocado continue o mesmo. Em outras palavras, w e y devem ser tais que balancem em zero para cada um dos cenários estudados.

Outras hipóteses utilizadas são a existência de taxas ou prazos compulsórios (carências) para a modificação completa da carteira, o que resultaria num ambiente de investimento que embora permita alguma flexibilidade na realocação de recursos através dos ativos escolhidos para compor o portfólio, não permite sua modificação completa sem ônus para o investidor. Embora se possa argumentar que esse cenário não é muito compatível com os mercados de ativos do hemisfério norte, altamente desregulamentados, ele é razoável no Brasil, posto que o país ainda mantém certas latências como dispositivo de proteção aos pequenos e médios investidores e como mecanismo de blindagem a ataques especulativos de grande escala e aquisições hostis. Há que se reconhecer, entretanto, que este trabalho sempre apresentará melhores resultados para aplicações envolvendo *ativos reais*, em que se espera manter o capital aplicado por um prazo longo ou médio.

3.1 Notações e Definições

Nesta seção, serão apresentadas as notações e as definições necessárias para o desenvolvimento das formulações do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância e sua reformulação, aplicando-se a versão estocástica do Método de Decomposição de Benders Generalizado. As tabelas a seguir, apresentam os conjuntos, os parâmetros do problema, as variáveis de decisão correspondentes ao 1º e 2º estágios, além de suas respectivas notações.

Tabela 2 – Conjuntos do modelo matemático

Símbolo	Descrição
S	Conjunto de cenários sob análise
N	Conjunto de ativos disponíveis

Tabela 3 – Parâmetros do modelo matemático.

Símbolo	Descrição
$\mathbf{r}\{N\}$	vetor de retorno esperado
$Q\{N, N\}$	matriz de variância - covariância
R	retorno alvo
K	cardinalidade do portfólio
$\mathbf{r}_s\{S, N\}$	vetor de retorno esperado no cenário s
$\hat{Q}_s\{S, N, N\}$	matriz de variância - covariância no cenário s
$P_s\{S\}$	Probabilidade do cenário s

Tabela 4 – Variáveis de Decisão 1º Estágio.

Símbolo	Descrição
$\mathbf{x}\{N\}$	variável de nível de investimento alocado a cada ativo
$\mathbf{z}\{N\}$	variável de seleção para cada ativo que compõe o portfólio ótimo
$\mathbf{t}\{N\}$	variável de medição da folga entre \mathbf{x} e \mathbf{z}

Tabela 5 – Variáveis de Decisão 2º Estágio.

Símbolo	Descrição
$\mathbf{x}^s \{S, N\}$	variável de nível de investimento alocado a cada ativo no cenário s
$\mathbf{y}^s \{S, N\}$	variável de correção para cima alocada a cada ativo no cenário s
$\mathbf{w}^s \{S, N\}$	variável de correção para baixo alocado a cada ativo no cenário s

A seguir, será apresentado o Problema de Seleção de Portfólios em dois estágios com correção estocástica.

3.2 O Problema Estocástico de Seleção de Portfólios em Dois Estágios

Considerando a notação definida na seção anterior, o Problema de Seleção de Portfólios em dois estágios é definido da seguinte forma:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{(s) \in S} P^s \cdot [x^s y^s w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

s.a.:

$$\left. \begin{aligned} r^T \cdot x &= R & (3.2) \\ 1^T \cdot x &= 1 & (3.3) \\ I \cdot x + I \cdot t &= I \cdot z & (3.4) \\ 1^T \cdot z &= K & (3.5) \\ z &\in \{0, 1\} & (3.6) \\ x &\geq 0 & (3.7) \end{aligned} \right\} \text{1º Estágio}$$

$$[r^s]^T \cdot [y^s] - [r^s]^T \cdot [w^s] \geq 0, \forall s \in S \quad (3.8)$$

$$1^T \cdot y^s - 1^T \cdot w^s = 0, \quad \forall s \in S \quad (3.9)$$

$$I \cdot x^s = I \cdot x, \quad \forall s \in S \quad (3.10)$$

$$I \cdot y^s \leq I \cdot t, \quad \forall s \in S \quad (3.11)$$

$$I \cdot w^s - I \cdot x^s \leq 0, \quad \forall s \in S \quad (3.12)$$

$$x^s, y^s, w^s \geq 0 \quad \forall s \in S \quad (3.13)$$

} 2º Estágio

As restrições (3.2) a (3.7) implementam o modelo de Seleção de Portfólios com restrição de cardinalidade proposto por Cesarone, Scozzari e Tardella (2013). A restrição (3.2) garante que o produto do retorno obtido pelos percentuais de investimentos seja igual ao retorno alvo. As restrições (3.3) garantem o investimento de 100% do capital disponível. Já as restrições (3.4) permitem que ocorra o investimento apenas em portfólios selecionados, com restrição de ligação $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$, e $\mathbf{t} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$, onde \mathbf{t} é a variável de folga relativa entre \mathbf{x} e \mathbf{z} respectivamente. Por sua vez, as restrições (3.5) garantem que a cardinalidade do portfólio seja atendida. Por fim, as restrições (3.6) e (3.7) correspondem às condições de integralidade do vetor \mathbf{z} que faz as escolhas das ações, e as condições de não negatividade da variável \mathbf{x} que permite apenas percentuais de investimento positivos.

As variáveis x^s , y^s e w^s permitem ajustar os níveis de investimento do portfólio escolhido no primeiro estágio através das variáveis t , x e z , e assim reagir a um cenário de expectativas frustradas. As restrições (3.8) evitam que os ajustes acarretem perda do retorno esperado, forçando a correção num dado cenário s a manter o retorno esperado inalterado, ou eventualmente computar um retorno superior. As restrições (3.9) evitam que o ajuste dos níveis de investimento no cenário s descumpra a regra de investimento de 100% do capital disponível. As restrições (3.10) são necessárias para permitir o correto funcionamento da técnica de projeção subjacente ao Método de Decomposição de Benders Generalizado, uma vez que a função objetivo (3.1) não é linearmente separável, embora seja convexa. Para considerações relativas a esse artifício matemático, consulte o trabalho de Bagajewicz e Manousiouthakis (1991). As restrições (3.11) definem um máximo para o ajuste positivo no cenário s proposto, por y^s enquanto as restrições (3.12) fazem o mesmo para o ajuste negativo no cenário s proposto por w^s . Finalmente, as restrições (3.13) estabelecem a não negatividade dos ajustes propostos em cada cenário.

Usando a ideia de projeção no espaço (t, x, z) e considerando que o 2º estágio é sempre viável $\forall (t, x, z)$ - hipótese de recurso completo - tem-se o problema equivalente dado a seguir:

$$\min_{(t, x, z) \in (T \times X \times Z)} \phi(t, x, z)$$

s.a.:

$$\phi(t, x, z) = \left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \sum_{(s) \in S} P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \\ \text{s.a.:} \\ [r^s]^T \cdot [y^s] - [r^s]^T \cdot [w^s] \geq 0 \quad \forall s \in S \\ 1^T \cdot y^s - 1^T \cdot w^s = 0, \quad \forall s \in S \\ (i) \ I \cdot x^s = I \cdot x, \quad \forall s \in S \\ (ii) \ I \cdot y^s \leq I \cdot t, \quad \forall s \in S \\ I \cdot w^s - I \cdot x^s \leq 0, \quad \forall s \in S \\ x^s, y^s, w^s \geq 0 \quad \forall s \in S \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.14) \\ (3.15) \\ (3.16) \\ (3.17) \\ (3.18) \\ (3.19) \\ (3.20) \end{array}$$

Atribuindo as variáveis duais u^s e v^s correspondentes respectivamente a (i) e (ii) e dualizando as restrições, tem-se o seguinte problema dual lagrangiano:

$$\max_{(u^s, v^s) \in (U \times V)^s} \left\{ \begin{array}{l} \min \frac{1}{2} \sum_{(s) \in S} \left\{ P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. + [u^s]^T \cdot (x^s - x) + [v^s]^T \cdot (y^s - t) \right\} \\ \text{s.a.:} \begin{cases} [r^s]^T \cdot [y^s] - [r^s]^T \cdot [w^s] \geq 0 \quad \forall s \in S \\ 1^T \cdot y^s - 1^T \cdot w^s = 0, \quad \forall s \in S \\ I \cdot w^s - I \cdot x^s \leq 0, \quad \forall s \in S \\ x^s, y^s, w^s \geq 0, \quad \forall s \in S \end{cases} \end{array} \right.$$

Considerando-se as restrições a seguir podem-se separar os termos que dependem de x^s , y^s e w^s dos termos que não dependem. Redefinindo (iii) como $(x^s, y^s, w^s) \in (X \times Y \times W)^s$ e separando os termos que dependem de (x^s, y^s, w^s) e os que não dependem, tem-se:

$$\phi(t, x, z) = \max_{(u^s, v^s) \in (U \times V)^s} \left\{ \begin{array}{l} \min_{(s) \in S} \left\{ -[u^s]^T \cdot x - [v^s]^T \cdot t \right. \\ \left. + \frac{1}{2} P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. + [u^s]^T \cdot x^s + [v^s]^T \cdot y^s \right\} \\ \text{s.a.: } (x^s, y^s, w^s) \in (X \times Y \times W)^s \end{array} \right.$$

Logo, como as duas parcelas são independentes de (x^s, y^s, w^s) , tem-se:

$$\phi(t, x, z) = \max_{(u^s, v^s) \in (U \times V)^s} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(s) \in S} \left(-[u^s]^T \cdot x - [v^s]^T \cdot t \right) + \\ \min_{(s) \in S} \left\{ \frac{1}{2} P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. + [u^s]^T \cdot x^s + [v^s]^T \cdot y^s \right\} \\ \text{s.a.: } (x^s, y^s, w^s) \in (X \times Y \times W)^s \end{array} \right.$$

Como o ínfimo é o maior limitante inferior e o supremo é o menor limitante superior, tem-se:

$$\begin{array}{l} \min_{(t, x, z) \in (T \times X \times Z)} \eta \\ \text{s.a.: } \eta \geq \sum_{(s) \in S} \left(-[u^s]^T \cdot x - [v^s]^T \cdot t \right) + \\ \min_{(x^s, y^s, w^s) \in (X \times Y \times W)^s} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(s) \in S} \left\{ \frac{1}{2} P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. + [u^s]^T \cdot x^s + [v^s]^T \cdot y^s \right\} \end{array} \right. \end{array}$$

Avaliando tanto $\phi(t, x, z)$ quanto o corte de Benders em uma iteração genérica h tem-se:

$$\min_{(t,x,z) \in (T \times X \times Z)} \eta$$

$$\text{s.a: } \eta \geq \sum_{(s) \in S} \left(-\{[u^s]^T\}^h \cdot x - \{[v^s]^T\}^h \cdot t \right) +$$

$$\min_{(x^s, y^s, w^s) \in (X \times Y \times W)^s} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(s) \in S} \left\{ \frac{1}{2} P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \{[u^s]^T\}^h \cdot x^s + \{[v^s]^T\}^h \cdot y^s \right\} \end{array} \right.$$

$$\phi(t^h, x^h, z^h) = \sum_{(s) \in S} \left(-\{[u^s]^T\}^h \cdot x^h - \{[v^s]^T\}^h \cdot t^h \right) +$$

$$\min_{(x^s, y^s, w^s) \in (X \times Y \times W)^s} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(s) \in S} \left\{ \frac{1}{2} P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \{[u^s]^T\}^h \cdot x^s + \{[v^s]^T\}^h \cdot y^s \right\} \end{array} \right.$$

Elimina-se então o mínimo entre chaves, resultando em:

$$\min_{(t,x,z) \in (T \times X \times Z)} \eta$$

s.a.:

$$\eta \geq \phi(t^h, x^h, z^h) - \sum_{(s) \in S} \{[u^s]^T\}^h \cdot (x - x^h) - \sum_{(s) \in S} \{[v^s]^T\}^h \cdot (t - t^h), \quad h = 1 \dots H$$

Considerando-se, ainda, a decomposição por cenário $s \in S$, escreve-se explicitamente o Programa Mestre de Benders (PMB):

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(s) \in S} \eta_s \\
 \text{s.a.:} \\
 & r^T \cdot x = R \\
 & 1^T \cdot x = 1 \\
 & I \cdot x + I \cdot t - I \cdot z = 0 \\
 & 1^T \cdot z = K \\
 & \eta_s \geq \phi_s^h(t^h, x^h, z^h) - \{[u^s]^T\}^h \cdot (x - x^h) - \{[v^s]^T\}^h \cdot (t - t^h), \forall s \in S, \forall h = 1 \dots H \\
 & x, t \geq 0 \\
 & z \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Para cada cenário $s \in S$ tem-se o subproblema de Benders (SPB) :

$$\min \frac{1}{2} P^s \cdot [x^s \ y^s \ w^s]^T \cdot [\hat{Q}]^s \cdot \begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ w^s \end{bmatrix}$$

s.a.:

$$[r^s]^T \cdot [y^s] - [r^s]^T \cdot [w^s] \geq 0 \quad (3.7)$$

$$1^T \cdot y^s - 1^T \cdot w^s = 0 \quad (3.8)$$

$$I \cdot w^s - I \cdot x^s \leq 0 \quad (3.9)$$

$$I \cdot x^s = I \cdot x^h, \quad (3.10)$$

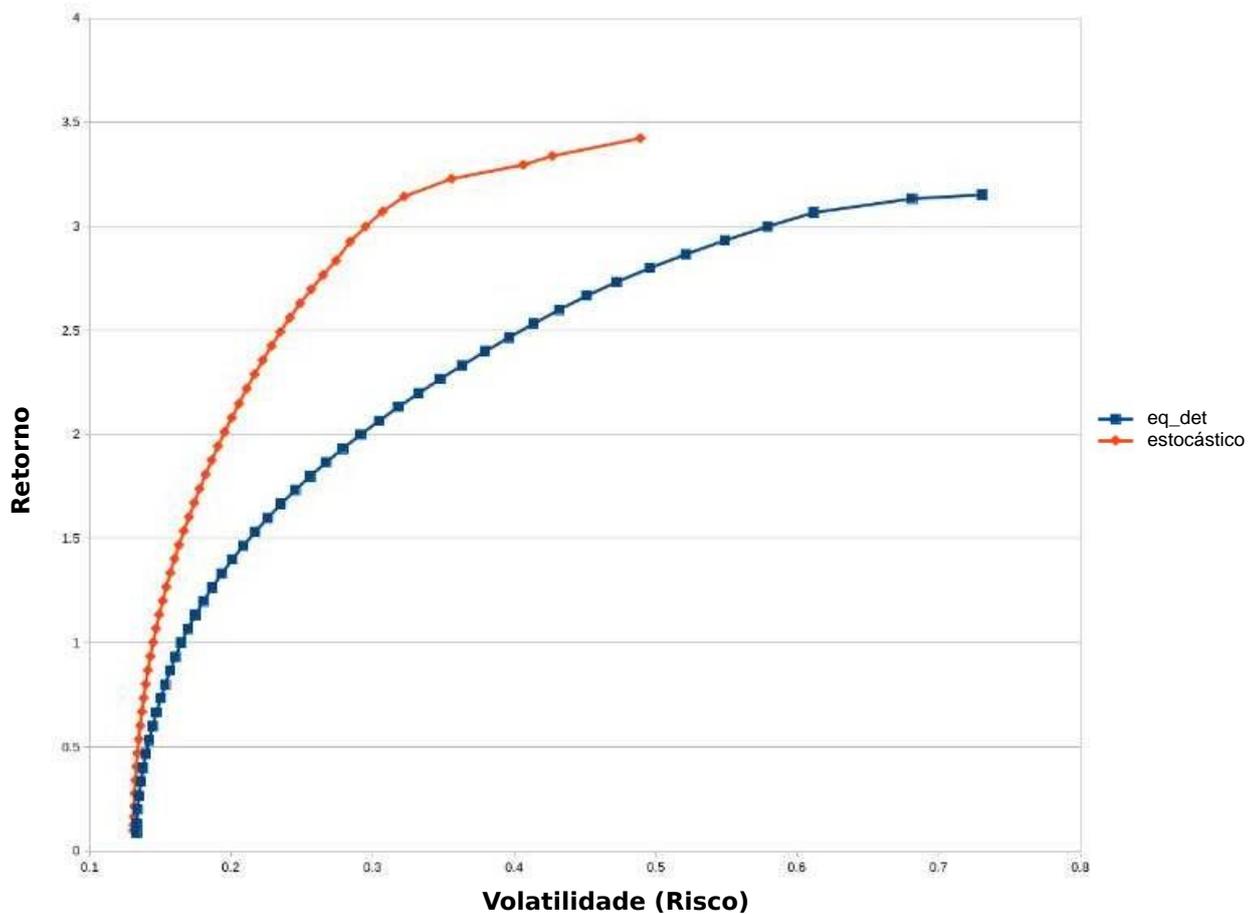
$$I \cdot y^s \leq I \cdot t^h \quad (3.11)$$

$$x^s, y^s, w^s \geq 0 \quad (3.12)$$

A solução será obtida por meio de iterações ou passos de **Newton**, em que (3.8) e (3.10) comporão permanentemente o **conjunto ativo** enquanto (3.7), (3.9), (3.11) e (3.12) serão adicionadas quando violadas. O número total de variáveis é $(3n + 2 + 6n)$ e o número de restrições é $(2 + 6n)$, em que n é o número total de ativos disponíveis.

Embora a correção via Programação Estocástica Proposta seja simplesmente um esforço de reajustar os níveis de investimento da carteira selecionada a priori, funcionando basicamente como um esforço de estabilização oportunista, há ganhos significativos em termos de blindagem a riscos não-antecipados ou de auferimento de retornos superiores para um dado nível de risco.

Figura 1 – Equivalente Determinístico x Estocástico



A programação estocástica é um ramo da otimização que lida com problemas de tomada de decisão em que a incerteza está presente. Ela se concentra em modelar e resolver problemas nos quais um ou mais parâmetros, ou variáveis do problema são afetados por eventos estocásticos, ou seja, eventos que ocorrem aleatoriamente.

Nesse contexto, a programação estocástica visa encontrar soluções ótimas que considerem a incerteza e minimizem o risco ou maximizem o retorno esperado, considerando a distribuição de probabilidade dos eventos estocásticos.

Para mostrar a superioridade da abordagem proposta, nos termos discutidos no parágrafo anterior, foi realizado um experimento preliminar confrontando apenas o modelo de Cesarone et al. e a extensão estocástica proposta, com os cenários gerados utilizando a técnica do Movimento Geométrico Browniano (*MGB*). Os resultados obtidos foram plotados sob a forma de fronteira de Pareto eficiente e mostrados na Figura 1. Como se pode observar, a dominância da abordagem estocástica é evidente, mesmo considerando essa simples abordagem inicial.

Para entender melhor a dominância da abordagem estocástica em relação à abordagem proposta por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#), considere o seguinte cenário: no gráfico da Figura 1, o eixo x representa o risco associado à escolha de um conjunto de portfólios para o realizar o investimento, e o eixo y representa o retorno obtido.

Fixando o risco do portfólio em 0.3 por exemplo, é possível notar que a versão estocástica proporciona um maior retorno quando comparada ao modelo equivalente determinístico proposto por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#), considerando-se o mesmo risco associado.

Outra forma de verificar a superioridade do modelo estocástico é fixar o retorno do ativo ($eixoy$) em 2. Como se pode observar na Figura 1, o modelo estocástico obtém maior retorno do que o modelo equivalente determinístico, considerando-se um risco mínimo.

Por fim, apesar da existência de diversos estudos sobre a seleção de portfólios, abrangendo diversas variantes do modelo de Markowitz, pouco material envolvendo extensões de Programação Estocástica dessa importante classe de modelos está disponível na literatura, o que solidifica a motivação deste trabalho.

3.2.1 Modelagem da Incerteza de Preços

Os preços de um ativo no mercado financeiro variam de forma estocástica ao longo do tempo, sendo, portanto, um processo estocástico contínuo de difusão. No presente trabalho a geração de cenários de incerteza se dá pela amostragem, via simulação, de caminhos aleatórios do Movimento Geométrico Browniano (MGB), comumente utilizado na literatura para esse fim. Ver, por exemplo, [Chou e Messina \(2023\)](#) e [Walter \(2021\)](#).

[Ross \(1995\)](#) define um processo estocástico como a sequência $v = \{v(l), l \in \mathcal{L}\}$ de variáveis aleatórias. Quando $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{N}$, v é um processo estocástico discreto e, para cada índice l no conjunto de índices \mathcal{L} , $v(l)$ representa a l -ésima variável aleatória a ser realizada. Por outro lado, se \mathcal{L} é contínuo, v é um processo estocástico contínuo e $v(l)$ representa a variável aleatória a ser realizada no instante l . Uma sequência de valores passíveis de realização no espaço amostral do processo estocástico é chamada de caminho aleatório (*random path*).

Cada variável da sequência possui uma distribuição probabilidade ($v(l) \sim F_l(\bar{v})$) própria que pode, ou não, ser comum entre elas. Em casos específicos, as variáveis aleatórias ($v(l)$) e/ou seus incrementos ($\{v(l_1) - v(l_0), v(l_2) - v(l_1), \dots, v(l_n) - v(l_{n-1})\}$ com $l_0, l_1, l_2, \dots, l_{n-1}, l_n \in \mathcal{L}$ e $l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{n-1} \leq l_n$) podem ser estatisticamente independentes.

Outra situação específica e de interesse ocorre quando os incrementos de um processo estocástico são estacionários, i.e., quando os incrementos $v(l+k) - v(l)$ são independentes e identicamente distribuídos para quaisquer k e $l, l+k \in \mathcal{L}$. Neste caso, a distribuição da mudança de valor entre dois pontos quaisquer depende somente da distância entre esses pontos (ROSS, 1995).

Um exemplo de processo estocástico contínuo com incrementos estacionários é o Movimento Browniano (MB) padrão, $\{\Psi(l), 0 \leq l \leq L\}$, que possui as seguintes propriedades (GLASSERMAN, 2004):

1. $\Psi(0) = 0$;
2. Os incrementos $\{\Psi(l_1) - \Psi(l_0), \Psi(l_2) - \Psi(l_1), \dots, \Psi(l_n) - \Psi(l_{n-1})\}$ são independentes para todo n e para $0 \leq l_0 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_{n-1} \leq l_n \leq L$;
3. $\Psi(l_2) - \Psi(l_1) \sim N(0, l_2 - l_1)$ para quaisquer $0 \leq l_1 \leq l_2 \leq L$.

Portanto, $\Psi(l) \sim N(0, l), \forall l \in \mathcal{L}$, e seu processo de difusão possui trajetória contínua, porém não diferenciável. Para constantes μ e $\sigma > 0$, um processo $\{\chi(l), 0 \leq l \leq L\}$ é um MB com *drift* μ e coeficiente de difusão σ se $\frac{\chi(l) - \mu l}{\sigma}$ é um MB padrão.

$$\chi(l) = \mu l + \sigma \Psi(l) \tag{3.13}$$

A partir de $\Psi(l)$, $\chi(l)$ é construído pela equação (3.13). Cabe ressaltar que o MB é um caso específico do Processo de Itô e que a expressão (3.13) é a solução da equação diferencial estocástica definida pela Integral de Itô. Para detalhes sobre cálculo estocástico e sobre o Processo de Itô ver Glasserman (2004) e Karatzas e Shreve (2012).

O MGB, também conhecido como processo de difusão geométrica, é um processo estocástico contínuo com incrementos estacionários e normalmente distribuídos. Ele foi introduzido por Merton (1973) como uma extensão do Movimento Browniano, proposto inicialmente por Bachelier (1900).

Segundo Walter (2021), o movimento geométrico Browniano é um padrão usualmente empregado na modelagem dos preços dos ativos dos mercados, permitindo uma avaliação temporal de retornos cumulativos. O autor destaca, todavia, que o mercado financeiro nem sempre apresenta movimentações gaussianas, tornando o MGB limitado para representações plenas da aleatoriedade do mercado. Apesar dessa limitação, o MGB segue sendo referência para esse tipo de aplicação.

Um processo estocástico $\{Y(l), 0 \leq l \leq L\}$ é um MGB se $\log Y(l)$ é um MB. A relação de recorrência em tempo contínuo do MGB é definida pela equação diferencial estocástica (3.14). Para o MGB, a taxa de crescimento esperada (*drift*) é $\mu Y(l)$ e o coeficiente de difusão $(\sigma Y(l))^2$. O parâmetro μ é conhecido como parâmetro de *drift* e σ como parâmetro de volatilidade.

$$dY(l) = \mu Y(l)dl + \sigma Y(l)d\Psi(l) \quad (3.14)$$

$Y(l)$ definido na equação (3.15) é a solução para (3.14). Observa-se que o MB gerado pelo logaritmo do MGB possui *drift* igual à $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ e coeficiente de difusão igual à σ (ver Glasserman (2004)).

$$Y(l) = Y(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) l + \sigma \Psi(l) \right\} \quad (3.15)$$

Para uma sequência discretizada de valores no intervalo $[0, L]$, partindo de (3.15), utiliza-se a equação de recorrência (3.16) para a construção de um caminho aleatório de acordo com um MGB com parâmetros μ e σ . A sequência $\{Z_i\}$ contém valores independentes gerados a partir da distribuição Normal padrão.

$$Y(l_{i+1}) = Y(l_i) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (l_{i+1} - l_i) + \sigma \sqrt{l_{i+1} - l_i} Z_{i+1} \right\} \quad (3.16)$$

3.2.2 Criação do conjunto de parâmetros do problema

Dado a premissa de comportamento do preço dos ativos financeiros como um MGB, é possível construir os cenários ($s \in S$) e suas respectivas matrizes \mathbf{r}_s e \hat{Q}_s a partir do histórico de preços dos ativos. Para tanto, é necessário:

1. Levantar o histórico de preços $P_{n,l}$ de cada ativo $n \in N$ em cada período $l \in \mathcal{L}$;
2. Calcular o estimador de máxima verossimilhança para os parâmetros de *drift* (μ_n) e de volatilidade (σ_n) de cada ativo $n \in N$;
3. Gerar, utilizando a equação (3.16), um caminho aleatório $\{P_{n,l}^s, l \in \mathcal{L}\}$ para cada ativo $n \in N$ e para cada cenário $s \in S$;
4. Calcular, cada cenário $s \in S$, o conjunto de parâmetros \mathbf{r}_s e \hat{Q}_s a partir do conjunto de caminhos $\{P_{n,l}^s, l \in \mathcal{L}\}_{n \in N}$;
5. Para cada cenário $s \in S$, regularizar a matriz de covariâncias $\hat{Q}_s \{S, N, N\}$ utilizando o método *Stein-Type Shrinkage*.

Neste trabalho utilizou-se o pacote Python yFinance¹ para extração de dados do site Yahoo! Finance. A série de dados é obtida para um conjunto discretizado no tempo $\hat{\mathcal{L}}$, podendo ser, por exemplo, o conjunto de dias no horizonte de um ano.

A premissa de modelagem de que os preços seguem o MGB (3.15) implica que o logaritmo dos preços seguem um MB (3.13) e, portanto, seus incrementos são normalmente distribuídos. Dessa forma, de posse da série de dados dos ativos financeiros, as estimativas de μ_n e σ_n podem ser obtidas por meio do cálculo da média (3.17) e variância amostral (3.18) para os incrementos do logaritmo da série de preços.

$$\log \hat{P} = \sum_{i=1}^{|\hat{\mathcal{L}}|} \frac{\log P_{n,l_i} - \log P_{n,l_{i-1}}}{|\hat{\mathcal{L}}|} \quad (3.17)$$

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{|\hat{\mathcal{L}}|} \frac{(\log P_{n,l_i} - \log \hat{P})^2}{|\hat{\mathcal{L}}|} \quad (3.18)$$

$$\mu_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2 = \log \hat{P} \quad (3.19)$$

Para a geração de instâncias aleatoriamente, os passos 1 e 2 são substituídos pela geração aleatória de valores de μ_n e σ_n . Em seguida, utiliza-se a equação (3.16) para a geração de caminhos aleatórios para cada ativo $n \in N$ em cada cenário de incerteza $s \in S$.

O retorno do preço (r_{s,n,l_i}) de um ativo financeiro ($n \in N$) entre l_i e l_{i+1} para o cenário $s \in S$ é calculado pela equação (3.20). O parâmetro \mathbf{r}_s é um vetor que contém a média dos retornos de cada ativo financeiro e \hat{Q}_s é a matriz de covariância destes retornos.

$$r_{s,n,l_i} = \frac{P_{n,l_{i+1}}^s - P_{n,l_i}^s}{P_{n,l_i}^s} \quad (3.20)$$

3.2.2.1 Regularização de $\hat{Q}_s \{S, N, N\}$

O cálculo da matriz de covariâncias por meio do estimador de covariância amostral resulta em uma matriz de covariâncias singular (LEDOIT; WOLF, 2003) e com grande erro de estimação (LEDOIT; WOLF, 2004; JOBSON; KORKIE, 1980). A singularidade da matriz de covariâncias inviabiliza a solução do problema por programação quadrática.

Para contornar esses problemas, a literatura sugere uma regularização do tipo encurtamento (*shrinkage*) para direcionar a matriz de covariâncias a um estimador estruturado, de menor erro, por meio de uma combinação linear entre este estimador e o estimador de covariância amostral (LEDOIT; WOLF, 2003; LEDOIT; WOLF, 2004; TOULOU MIS, 2015).

¹ Documentação em <<https://pypi.org/project/yfinance/>>

Na equação (3.21), \hat{Q} representa o estimador de covariância amostral, E o estimador estruturado (alvo) e γ o fator de encolhimento. O método *Stein-Type Shrinkage* utiliza o estimador estruturado construído pela equação (3.22), com Σ representando uma matriz de covariância não observada a priori.

$$\hat{Q}^* = \gamma E + (1 - \gamma)\hat{Q} \quad (3.21)$$

$$E = \frac{\text{tr}(\Sigma)}{n} I_n \quad (3.22)$$

No presente trabalho a regularização foi realizada por meio da classe `ShrunkCovariance`² do módulo `covariance` do pacote `Scikit-Learn`. O pacote usa a própria matriz de covariância estimada (\hat{Q}) como Σ .

² Documentação em <https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.covariance.ShrunkCovariance.html>

4 Métodos de Programação Quadrática

Para proceder à solução do Subproblema de Benders Generalizado ou Método L-Shaped Não-linear no modelo proposto por esta pesquisa para Seleção estocástica de Portfólios com restrição de cardinalidade, essencialmente tem-se dois algoritmos disponíveis. Para apresentá-los, desenvolve-se, a seguir, o tópico de Programação Quadrática: O problema geral de Programação Quadrática pode ser definido como:

$$\min z = \frac{1}{2} \cdot x^T \cdot G \cdot x + f^T \cdot x \quad (4.1)$$

s.a:

$$A \cdot x = b \quad (4.2)$$

$$C \cdot x \leq d \quad (4.3)$$

Em que G é a Matriz Hessiana, f é um vetor de custos lineares, A é a matriz subjacente às restrições de igualdade, b é vetor de termos independentes das restrições de igualdade, C é a matriz subjacente às restrições de desigualdade e d é o vetor de termos independentes das restrições de desigualdade. G é suposta simétrica e positiva-definida e o construto $Cx \leq d$, contém as restrições de não-negatividade escritas para x . É bem conhecido que o esforço de solução de (4.1)-(4.3) é função do condicionamento da matriz G e do número de desigualdades do problema (4.1)-(4.3).

Escrevendo as condições de KKT (Karush Khun-Tucker) para (4.1)-(4.3), considerando-se o conjunto de todas as restrições ativas para um dado valor de x , definindo-o como A_s — do inglês ‘active-set’ — o conjunto formado por todas as restrições $A \cdot x = b$ e ainda pelas linhas de $C \cdot x \leq d$ tais que $C \cdot x = d$, tem-se:

$$A_s = \begin{bmatrix} A \\ \dots \\ C \end{bmatrix}, b_s = \begin{bmatrix} B \\ \dots \\ D \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\begin{aligned} G \cdot x + f - [u^t \cdot A_s]^T &= 0 \\ A_s \cdot x - b_s &= 0 \end{aligned}$$

Resultando:

$$\begin{bmatrix} G & -A_s^T \\ A_s & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \\ b_s \end{bmatrix}$$

Fazendo $x^* = x^k + p^k$, onde x^* é a estimativa corrente do ótimo, o sistema acima se torna:

$$\begin{bmatrix} G & -A_s^T \\ A_s & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -p \\ u^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ c \end{bmatrix}$$

em que :

$$\begin{cases} c = A_s \cdot x^k - b_s \\ g = f + G \cdot x^k \\ p = x^* - x^k \end{cases}$$

e o par (x^*, u^*) é ótimo e único, se $Z^T \cdot G \cdot Z$ é definida positiva e Z é tal que $Null(A) = \{ u^T \cdot Z \mid u \in \mathbb{R} \}$

O esforço de solução fica reduzido a identificar corretamente os componentes de A_s e b_s , isto é, qual é o conjunto-ativo correto que conduz a x^* ótimo. Embora haja três tipos de técnicas largamente empregadas, nem todas servem ao caso específico desta pesquisa. Desse modo, a seguir, serão apresentados os três caminhos aplicáveis, e, posteriormente, será fornecida uma justificativa para o descarte de uma das técnicas apontadas:

- a) Método do Conjunto Ativo;
- b) Métodos de Projeção;
- c) Métodos de Pontos interiores;

Descarta-se neste trabalho a alternativa (c), devido à importância da precisão na determinação do vetor de multiplicadores duais u , que está diretamente relacionada à eficácia do plano cortante de Benders gerado pela solução do subsistema de Programação Quadrática. Problemas de precisão na determinação dos valores das variáveis duais, são bem conhecidos em Métodos de Pontos Interiores, e “[...] a exigência de positividade das variáveis duais e de folga podem causar o mau funcionamento da matriz hessiana.” (SILVA, 2019).

Resta então comparar as alternativas (a) e (b), para resolver de maneira rápida e eficaz o subproblema de Benders, fornecendo ainda multiplicadores de lagrange de boa qualidade, condição essencial para aumentar a eficiência global do procedimento. A principal desvantagem do Método do Conjunto Ativo é que alguns iterandos podem se encontrar no interior da região viável, impedindo o estabelecimento de heurística similar à do Método Simplex via custos reduzidos, tornando sua natureza eminentemente combinatória.

4.1 Método do Conjunto Ativo Primal

O Método do Conjunto Ativo Primal é uma técnica clássica que trabalha a partir de uma solução viável x^k e da detecção de uma possível restrição bloqueante capaz de impedir que o passo $p^k = x - x^k$ determinado pela solução do sistema KKT seja tomado em sua totalidade. Denominando α^k ao maior passo viável em que todas as restrições são satisfeitas, isto é, $\alpha^k \in [0, 1]$, corrija-se a estimativa do ótimo para:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha p^k \quad (4.4)$$

$$\text{Com } \alpha^k \leq \min \left\{ \frac{b - Ax^k}{Ap^k} \right\} \quad (4.5)$$

ou ainda

$$\alpha^k = \min \left\{ 1, \min_i \left\{ \frac{b_i - a_i^T}{a_i^T \cdot p^k} : \forall i \in A_s, a_i^T \cdot p^k < 0 \right\} \right\}$$

A restrição que determina o mínimo na expressão algébrica anterior é, então, a restrição bloqueante e deve ser inserida no conjunto ativo $[A_s]^{k+1} \cdot x^{k+1} = [b_s]^{k+1}$ e o passo pode ser tomado na forma (4.4).

Ao calcular o $p^k = 0$, uma de duas condições é verdadeira:

- (i) $u \geq 0 \rightarrow$ solução ótima encontrada;
- (ii) $u < 0 \rightarrow$ Há restrições que se removidas de A_s ($u < 0$), permitem reduzir o valor de Z .

Um pseudocódigo do Método do Conjunto Ativo Primal é apresentado a seguir:

Algoritmo 1: Executa o Método do Conjunto Ativo Primal.

Entrada: Instância do Problema; Retorno médio dos ativos; Matriz de Covariância

Saída: Conjunto de Portfólios Ótimos.

```

1 Encontre um ponto factível  $x_0$ 
2 Defina  $As_0$  como o subconjunto de restrições ativas para  $x_0$ 
3 para  $k = 0, 1, 2, \dots$  faça
4   Resolva o Subproblema  $Sp_k$ 
5   se  $p_k = 0$  então
6     Calcule os multiplicadores de lagrange  $\hat{u}_i$  ;
7     Defina  $\hat{A}_s = As_k$  ;
8     se  $\hat{u}_i \geq 0$  para todo  $i \in As_k \cap I$  então
9       Pare, a solução  $x^* = x_k$  é ótima ;
10    fim
11    senão
12      Defina  $j = \text{agmin}\{\hat{y}_j : j \in As_k \cap I\}$ 
13       $x_{k+1} \leftarrow x_k, \quad As_{k+1} \leftarrow As_k - \{j\}$ 
14    fim
15  fim
16  senão se ( $p_k \neq 0$ ) então
17    Calcule  $\alpha_k$  e  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ 
18    se há restrições bloqueantes então
19      Obtenha  $As_{k+1}$  adicionando uma restrição bloqueante a  $As_k$ 
20    fim
21    senão
22       $As_{k+1} \leftarrow As_k$ 
23    fim
24  fim
25 fim

```

Fonte: Camponogara (2006) apud Miranda Júnior (2023)¹

¹ Miranda, Júnior, Gilberto. Material fornecido durante Orientação de Mestrado na Universidade Federal de Ouro Preto.

O Algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo do Algoritmo do Conjunto Ativo. O algoritmo usa a Instância do problema, o Retorno Médio dos ativos e a Matriz de Variância-Covariância como entrada. Como saída, o algoritmo retorna o conjunto de Portfólios Ótimos. O algoritmo inicia calculando uma solução viável x_0 para o Problema de Seleção de Portfólios (linha 1), produzindo iterandos viáveis. Posteriormente, é definido um subconjunto As_0 de restrições ativas para x_0 , que contém todas as restrições de igualdade como também algumas desigualdades ativas (linha 2). Para cada iteração k , a atualização do iterando corrente é obtida a partir da resolução do subproblema quadrático Sp_k contendo um subconjunto de restrições impostas como igualdade, (linhas 3 e 4) respectivamente. Se a solução do subproblema quadrático for $p_k = 0$, os multiplicadores de lagrange u_i são calculados, e define-se $\hat{A}_s = As_k$ (linhas 5, 6 e 7) respectivamente. Se o conjunto dos multiplicadores lagrangeanos u_i forem ≥ 0 , todas as restrições do conjunto ativo são satisfeitas, solução ótima encontrada (linhas 8 e 9) respectivamente. Em caso negativo, as restrições que tem multiplicadores $u_i < 0$, são removidas do conjunto \hat{A}_s e um novo subproblema é resolvido, (linhas 11 e 12) respectivamente. Em seguida, calcula-se o maior passo possível $\alpha_k \in [0, 1]$, e o iterando x_k é atualizado a partir do α_k (linhas 13 e 14). Se existirem restrições bloqueantes, ou seja, restrições violadas que não pertencem ao conjunto ativo As_k , um novo conjunto As_{k+1} é obtido, e a restrição bloqueante é adicionada ao conjunto As_k . Caso contrário, o conjunto ativo permanece inalterado para a próxima iteração. $As_{k+1} = As_k$ (linhas 16, 17 e 18).

As características apontadas sobre o Método do Conjunto Ativo o tornam mais bem-comportado para problemas com pequeno número de restrições de desigualdade. Para aumentar a velocidade de detecção do conjunto ativo ótimo, uma alternativa é utilizar Métodos de projeção.

4.2 Método de Projeção em Caixa Primal

Em geral, computar a projeção do Passo-de-Newton sobre a região de viabilidade, caso ela seja poliedral, envolve a minimização da distância euclidiana entre o poliedro que codifica a região de viabilidade do problema e $x^k + p^k$. Isso significa resolver um problema de Programação Quadrática que pode ser tão ou mais difícil que o original. O Subproblema de Benders associado com a seleção estocástica de portfólios, no entanto, confina todas as variáveis de decisão no interior da caixa $[0, 1]$. A projeção da direção de Newton na caixa $[l, u]$, no entanto, pode ser determinada em tempo estritamente linear, via algoritmo de inspeção, isto é:

$$P(X)|_{x \in [l,u]} = \begin{cases} l_i : x_i < l_i \\ x_i : l_i \leq x_i \leq u_i \\ u_i : x_i > u_i \end{cases}, \forall i \in N$$

Essa possibilidade agrega inúmeras vantagens tais como:

- (i) permite atualizar uma fração muito maior do conjunto ativo a cada iteração, em vez de detectar meramente a restrição bloqueante.
- (ii) tem custo na mesma ordem de complexidade (*linear*) da determinação da restrição bloqueante no método do conjunto ativo.
- (iii) Não acarreta perda de precisão na determinação dos multiplicadores duais lagrangeanos que irão compor os planos cortantes de Benders, quando comparado com a alternativa clássica.

Um Pseudocódigo do Método de Projeção em Caixa é dado, a seguir:

Algoritmo 2: Executa o Método de Projeção em Caixa.

Entrada: Instância do Problema; Retorno médio dos ativos; Matriz de Covariância

Saída: Conjunto de Portfólios Ótimos.

```

1 Inicialize  $[A_s^0, b_s^0], x^0, H \leftarrow G^{-1}$ 
2 enquanto  $p > tol$ : faça
3    $g^k \leftarrow G \cdot x^k - f$ 
4    $c^k \leftarrow b_s^k - A_s^k x^k$ 
5    $u^k \leftarrow [-A_s^k \cdot H \cdot (A_s^k)^T]^{-1} \cdot [c^k + A_s^k \cdot H \cdot g^k]$ 
6    $p^k \leftarrow -H \cdot [(A_s^k)^T \cdot u^k + g^k]$ 
7    $x^k \leftarrow x^k + p^k$ 
8   enquanto  $(\|p\|_2 + \|c\|_2) > tol$  faça
9      $x_i^k \leftarrow \begin{cases} l_i : x_i^k < l_i \\ x_i^k : l_i \leq x_i^k \leq u_i \forall i \\ u_i : x_i^k > u_i \end{cases}$ 
10     $[A_s^k, b_s^k] \leftarrow [A_s^k, b_s^k] \cup \{[x_i^k = l_i] : x_i^k \leftarrow l_i\} \cup \{[x_i^k = u_i] : x_i^k \leftarrow u_i\}$ 
11  fim
12 fim

```

Fonte: Os Autores (2023).

4.3 Resolvendo o Sistema KKT

Uma etapa importante dos métodos do conjunto ativo e de projeção em caixa é a solução do sistema KKT, dado por:

$$(a) \begin{bmatrix} G & -A_s^T \\ A_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ c \end{bmatrix}$$

Para economizar tempo, e considerando que G é positiva-definida, usa-se o Método do Espaço Coluna de Schur — do inglês *'Range Space Method'*. Partindo de (a):

$$-G \cdot p - A_s^T \cdot u = g \quad \therefore$$

$$-(G^{-1} \cdot G) \cdot p - G^{-1} \cdot A_s^T \cdot u = G^{-1} \cdot g \quad \therefore$$

$$p = -G^{-1} \cdot g - G^{-1} \cdot A_s^T \cdot u \quad \therefore$$

$$\boxed{p = G^{-1}(-g - A_s^T \cdot u)} \quad (c)$$

Substituindo (c) em (b) tem-se:

$$-A_s \cdot p = c \quad \therefore$$

$$-A_s \cdot [-G^{-1} \cdot g - G^{-1} \cdot A_s^T \cdot u] = c \quad \therefore$$

$$A_s \cdot G^{-1} \cdot g + A_s \cdot G^{-1} \cdot A_s^T \cdot u = c \quad \therefore$$

$$\boxed{A_s \cdot G^{-1} \cdot A_s^T \cdot u = c - A_s \cdot G^{-1} \cdot g} \quad (d)$$

Resolve-se então o sistema (d) e ao se dispor do valor de u , procede-se a obtenção de p via (c). A etapa de maior custo computacional é a determinação da inversa de G , que, por ser definida-positiva por hipótese, não se espera que represente desafio numérico considerável.

4.4 Lidando com Degeração e Ciclagem

Embora os algoritmos desenvolvidos até agora neste capítulo sejam suficientes para resolver a maioria das instâncias encontradas ao longo do processo de convergência do Método de Decomposição de Benders Generalizado, há diversas instâncias que apresentam o fenômeno conhecido como *degeneração*. Esse fenômeno traz consigo uma desvantagem computacional significativa, especialmente na forma de ciclagem nos Métodos de Conjunto Ativo. Em última análise, a técnica de projeção em caixa também pode ser classificada como suscetível a esse fenômeno, uma vez que ela, de maneira análoga, reduz o problema à seleção de restrições ativas e folgadas em uma dada iteração.

A literatura de otimização convexa restrita dá pouca ênfase a esses fenômenos, apesar de, no presente estudo, serem relativamente frequentes. Em média, cerca de 3,4% das instâncias, as quais são resolvidas a cada passo do Método de Benders Generalizado, apresentam degeneração e ciclagem com maior ou menor severidade. Um exame rápido da literatura aponta desde os trabalhos seminais de Bland (BLAND, 1977) e Philip Wolfe (WOLFE, 1963), até os artigos técnicos de Fletcher (FLETCHER, 1993), com seu método robusto para tratar degeneração e ciclagem, via solução de problemas de complementaridade linear, e (GILL et al., 1989), com seu procedimento denominado *EXPAND*.

Neste trabalho, adotou-se a técnica *EXPAND* proposta por (GILL et al., 1989), que constitui a base do pacote comercial *SNOPT*. Entretanto, há evidências de que esse procedimento não seja totalmente hígido em casos mais severos, conforme destacado por (HALL; MCKINNON, 2004). A escolha dessa técnica prioriza exclusivamente o desempenho, uma vez que alternativas *a la* P. Wolfe e R. Fletcher tendem a ter um comportamento mais combinatório, o que resultaria em atrasos significativos na identificação do conjunto ativo ótimo. No entanto, é importante ressaltar que a abordagem de (GILL et al., 1989) é muito sensível à escolha do tamanho do passo para o aumento temporário da região de viabilidade (resolução de malha). Essa sensibilidade pode favorecer o uso do passo adaptativo, mas também pode levar a falhas na identificação do conjunto ativo ótimo ou a um número excessivo de iterações até a convergência, dependendo do quão reativo é o esquema de adaptação.

Tal seleção de ferramentas também se apoia na integração com a técnica de decomposição de Benders. As manipulações algébricas, como *projeção*, *linearização externa* e, principalmente, a *relaxação* (ou seja, a geração tardia de planos cortantes que constituem a base do Método de Benders Generalizado), garantem que seja possível renunciar à solução de um dado subsistema em uma determinada iteração, caso ocorra degeneração severa. Nesse contexto, basta omitir meramente a geração do corte para manter a consistência; se violado, esse mesmo plano cortante será gerado novamente em uma iteração posterior.

No próximo capítulo, serão apresentados os experimentos computacionais preliminares, utilizados para validar os tempos de execução tanto para o Algoritmo do Conjunto Ativo quanto para o Método de Projeção em Caixa. Adicionalmente, será descrita a técnica de planejamento dos experimentos completos, realizados após a integração com o Método de Decomposição de Benders Generalizado, fase final da pesquisa.

5 Experimentos de Computação e Análise de Resultados

O presente capítulo apresenta os resultados obtidos, utilizando-se as técnicas apresentadas nos capítulos 3 e 4. Antes da realização dos experimentos computacionais, foi inicialmente desenvolvido um procedimento para a criação das instâncias, aplicando técnicas de pré-processamento para reduzir o tamanho das instâncias e evitar problemas de instabilidade numérica. Finalmente, para cada instância pré-processada, o Método de Decomposição de Benders Generalizado foi executado e os resultados obtidos foram confrontados com os disponíveis na literatura, mais especificamente com o modelo proposto por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#).

5.1 Planejamento Experimental

A metodologia utilizada neste trabalho consiste na utilização de técnicas de otimização eficientes para resolver o Problema Estocástico em Dois Estágios de Seleção de Portfólios de Média-Variância com restrição de cardinalidade.

O método pode ser dividido em quatro etapas: a primeira etapa consiste na realização do procedimento para geração das instâncias para o referido problema, considerando-se seus dados de entrada, quais sejam a construção da matriz de Variância-Covariância e dos retornos médios no período considerado a partir dos dados brutos de valoração dos ativos.

Já a segunda etapa corresponde ao pré-processamento das instâncias, para melhorar as propriedades numéricas do problema. O principal desafio nessa etapa é evitar que a matriz de Variância-Covariância seja singular, pois isso provoca a instabilidade numérica do problema e aumenta os custos de computação. A bem estabelecida técnica conhecida como *Stein-Type Shrinkage*, mais detalhes em [Ledoit e Wolf \(2004\)](#) para uma descrição intuitiva ainda que sumária do procedimento. Embora não se pretenda discutir aqui os meandros teóricos específicos da técnica, é fundamental salientar que, sem tal tratamento, o problema seria considerado intratável, ou haveria grandes penalidades a pagar, do ponto de vista de esforço de solução, por exemplo, com o uso de técnicas de aproximações sucessivas para a determinação da inversa da Hessiana, como métodos das famílias *BFGS*¹ ou *DFP*².

A terceira etapa é a execução do Algoritmo do Conjunto Ativo e do Método de Projeção em Caixa para resolver o Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância, para uma dada seleção de ativos.

Por fim, a quarta e última etapa consiste na execução integrada da técnica com o Método de decomposição de Benders Generalizado e no confronto de resultados e tempos de computação.

5.2 Avaliando a Escalabilidade do Resolvedor de Subproblemas

Os algoritmos propostos foram implementados utilizando-se a linguagem *Python 3.9*, enquanto para a realização dos testes computacionais, utilizaram-se as instâncias geradas através das técnicas de pré-processamento, discutidas na Seção 3.2.2, as quais variaram seu tamanho em: 50, 100, 200, 400, 600, 800, 1.000 e 1.200 ativos, respectivamente, em um computador do tipo *desktop* de perfil comercial. Adicionalmente, para as execuções do algoritmo do Conjunto-Ativo e do Método de Projeção em Caixa, foi considerado um tempo limite de 3.600 s.

¹ O algoritmo de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) é um método quase-Newton que aproxima a matriz Hessiana inversa da função objetivo de forma eficiente. Ao contrário dos métodos Newtonianos, o BFGS realiza atualizações iterativas para aproximar a matriz Hessiana, utilizando o gradiente da função e os deslocamentos entre os pontos no espaço de busca. Isso permite uma busca eficiente pelo mínimo global, sem a necessidade de calcular diretamente a matriz Hessiana. A principal diferença entre os algoritmos Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) e Davidon-Fletcher-Powell (DFP) está na estratégia de atualização da matriz Hessiana aproximada. O DFP baseia-se no gradiente e nos deslocamentos no espaço de busca, enquanto o BFGS considera a diferença entre os gradientes calculados em iterações subsequentes e as alterações correspondentes nos deslocamentos. Essa abordagem mais refinada do BFGS permite uma adaptação mais precisa da matriz Hessiana, resultando em uma convergência aprimorada do algoritmo.

² O algoritmo de Davidon-Fletcher-Powell é um método quase-Newton que aproxima a matriz Hessiana da função objetivo por meio de atualizações iterativas. Utilizando o gradiente da função e os deslocamentos entre os pontos no espaço de busca, o DFP constrói uma matriz Hessiana aproximada que captura a curvatura da função. Isso possibilita determinar a direção de busca e ajustar o tamanho do passo para alcançar uma convergência eficiente.

A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos pelo Método de Projeção em Caixa e Algoritmo do Conjunto-Ativo, respectivamente. Para a exibição dos resultados em forma tabular os seguintes parâmetros foram utilizados: *Tempo[s]*, *#it* e *Speed-Up*, em que:

- *Tempo[s]*: corresponde ao tempo necessário para convergência dos algoritmos propostos;
- *#it*: quantidade de iterações necessárias para encontrar a solução ótima do problema;
- *Speed-Up* corresponde a quantas vezes o Método de Projeção em Caixa é mais veloz que o Algoritmo do Conjunto Ativo.

Tabela 6 – Resultados Obtidos utilizando-se o Algoritmo do Conjunto Ativo e o Método de Projeção em Caixa

(a) Método de Projeção em Caixa				(b) Algoritmo do Conjunto Ativo		
Instância	Tempo [s]	#it	<i>Speed-Up</i>	Instância	Tempo [s]	#it
50	0,014	7	5	50	0,075	45
100	0,027	7	22	100	0,585	65
200	0,058	8	45	200	0,261	194
400	0,453	9	32	400	14,577	386
600	0,802	8	61	600	48,898	581
800	1,932	8	61	800	118,443	773
1.000	3,775	9	65	1.000	246,795	960
1.200	5,746	8	83	1.200	475,723	1.168

Fonte: Os Autores (2023).

Analisando-se a Tabela 6, é possível identificar a superioridade do Método de Projeção em Caixa em relação ao Algoritmo do Conjunto Ativo.

Considerando o pior caso com 1.200 ativos, constatou-se que o Método de Projeção em Caixa supera significativamente o Algoritmo do Conjunto Ativo, sendo 146 vezes mais rápido em termos de iterações. Enquanto o Algoritmo do Conjunto Ativo necessitou de 1.168 iterações para resolver o problema, o Método de Projeção em Caixa o fez em um número muito menor de iterações.

Esses resultados evidenciam que o Método de Projeção em Caixa do apresenta uma taxa de convergência mais rápida em comparação com o Algoritmo do Conjunto Ativo. Essa maior eficiência pode ser atribuída à abordagem baseada no Método de Newton utilizada pelo Método de Projeção em Caixa, que usa informações sobre a curvatura da função objetivo para direcionar as iterações em busca da solução ótima. Por outro lado, o Algoritmo do Conjunto Ativo adota uma estratégia distinta, a qual demanda mais iterações para alcançar o mesmo resultado.

Além disso, conforme a velocidade de convergência do Método de Projeção em Caixa em comparação com o Algoritmo do Conjunto Ativo, que pode ser verificado pelo parâmetro *Speed-Up* na Tabela 6a, o Método de Projeção em Caixa é 83 vezes mais rápido que o Conjunto Ativo, no pior caso, com 1.200 ativos.

5.3 Avaliando a Precisão do Resolvedor de Subproblemas contra o *GUROBI 10*

Para esta etapa da experimentação, o código integrado foi modificado para realizar duas soluções de subproblemas por iteração global, permitindo a comparação das soluções obtidas pelo resolvedor de programação quadrática do Gurobi, baseado em técnicas de pontos interiores, e o Método de Projeção em Caixa, abordagem proposta para programação quadrática restrita.

Foram realizados testes envolvendo 15.000 instâncias, correspondentes aos mil cenários resolvidos por iteração, 500 cenários resolvidos a partir de *core-points* e 500 cenários resolvidos a partir de soluções integrais propostas pelo Programa Mestre de Benders. A Tabela 7 dada a seguir exhibe os 50 maiores desvios observados. Uma análise rápida permite atestar a correção e a higidez da abordagem de solução proposta para os subproblemas, uma vez que o maior erro observado é da ordem de 10^{-9} .

Vale ainda frisar que como o processo de cálculo via sistema KKT vincula a determinação das variáveis duais, primais e da função objetivo, respectivamente nessa ordem, esperam-se desvios da mesma magnitude ou menores nos valores das variáveis de decisão primais e duais, sob pena de se incorrer em erros de maior magnitude na determinação do valor ótimo da função objetivo $\phi(t, x, z)$.

Tabela 7 – Precisão relativa entre o *GUROBI 10* e o Método de Projeção em Caixa (MPC) - 50 maiores desvios observados (entre 15.000).

Instância	$\phi(t, x, z) - \text{Gurobi 10} :$	$\phi(t, x, z) - \text{MPC} :$	Desvio (Erro):
224	2.98213940E-04	2.98204000E-04	-9.93990913E-09
10	2.96555916E-04	2.96546000E-04	-9.91554716E-09
297	4.07708609E-04	4.07699000E-04	-9.60918802E-09
385	7.33905550E-04	7.33896000E-04	-9.54963543E-09
311	5.03640505E-04	5.03631000E-04	-9.50454195E-09
107	6.77136466E-04	6.77127000E-04	-9.46594155E-09
294	6.92560450E-04	6.92551000E-04	-9.44955731E-09
209	1.15378643E-03	1.15377700E-03	-9.43492328E-09
458	9.98411364E-04	9.98402000E-04	-9.36376879E-09
194	4.37927312E-04	4.37918000E-04	-9.31210655E-09
139	8.00507273E-04	8.00498000E-04	-9.27338765E-09
43	6.63949269E-04	6.63940000E-04	-9.26896156E-09
253	5.70982264E-04	5.70973000E-04	-9.26445642E-09
2	5.01683238E-04	5.01674000E-04	-9.23754911E-09
276	6.15737152E-04	6.15728000E-04	-9.15189543E-09
192	6.15574122E-04	6.15565000E-04	-9.12180784E-09
116	2.83249114E-04	2.83240000E-04	-9.11401961E-09
103	6.33740104E-04	6.33731000E-04	-9.10442528E-09
128	3.81190095E-04	3.81181000E-04	-9.09475083E-09
297	4.25633088E-04	4.25624000E-04	-9.08776879E-09
229	3.58990072E-04	3.58981000E-04	-9.07158750E-09
200	6.33080059E-04	6.33071000E-04	-9.05860950E-09
211	6.07219031E-04	6.07210000E-04	-9.03118781E-09
341	5.86417993E-04	5.86409000E-04	-8.99323441E-09
11	3.06024787E-04	3.06015794E-04	-8.99266472E-09
328	7.09277963E-04	7.09269000E-04	-8.96334531E-09
463	6.86155962E-04	6.86147000E-04	-8.96243039E-09
27	3.24625916E-04	3.24617000E-04	-8.91589470E-09
167	5.73782907E-04	5.73774000E-04	-8.90685755E-09
499	6.51195818E-04	6.51187000E-04	-8.81754477E-09
423	8.03552798E-04	8.03544000E-04	-8.79816085E-09
193	7.95800779E-04	7.95792000E-04	-8.77936542E-09
68	3.54856776E-04	3.54848000E-04	-8.77639463E-09
409	8.07780723E-04	8.07772000E-04	-8.72331619E-09
71	9.73833722E-04	9.73825000E-04	-8.72211374E-09
27	3.93360698E-04	3.93352000E-04	-8.69797987E-09
277	4.03132697E-04	4.03124000E-04	-8.69727259E-09
357	4.46013680E-04	4.46005000E-04	-8.68001389E-09
384	6.48426672E-04	6.48417993E-04	-8.67989506E-09
99	9.22900676E-04	9.22892000E-04	-8.67589768E-09
246	3.95001275E-04	3.94992615E-04	-8.65947785E-09
76	5.93524656E-04	5.93516000E-04	-8.65605924E-09
218	1.06977765E-03	1.06976900E-03	-8.65107501E-09
493	3.54450635E-04	3.54442000E-04	-8.63524809E-09
139	5.09552631E-04	5.09544000E-04	-8.63057851E-09
415	3.50859623E-04	3.50851000E-04	-8.62317851E-09
356	3.99564597E-04	3.99556000E-04	-8.59690887E-09
259	3.77947594E-04	3.77939000E-04	-8.59397328E-09
447	9.24141496E-04	9.24133000E-04	-8.49582649E-09
152	8.60708490E-04	8.60700000E-04	-8.48992604E-09
256	3.12026474E-04	3.12018000E-04	-8.47439252E-09
183	5.74482473E-04	5.74474000E-04	-8.47301872E-09
382	8.32584698E-04	8.32577000E-04	-7.69769606E-09

Fonte: Os Autores (2023).

No experimento a seguir, a comparação no que tange a desempenho entre essas duas técnicas será realizada.

5.4 Testando o Método de Decomposição de Benders Generalizado contra o *GUROBI 10*

Nessa etapa, um conjunto sumário, porém significativo, de testes foi conduzido para mensurar o *speed-up* alcançável com a substituição do método de programação quadrática do *Gurobi* pelo Método de Projeção em Caixa descrito no Capítulo 4 quando integrado com o Método de Decomposição de Benders Generalizado. Utilizando uma instância com 50 ativos e 500 cenários, cujo processo de aquisição e pré-processamento foi detalhado no Capítulo 3, foram selecionados valores para a cardinalidade do portfólio de 4, 5 e 6 ativos respectivamente.

Os resultados obtidos são dispostos na Tabela 8, onde se pode verificar que os tempos de execução com subproblemas resolvidos via Método de Projeção em Caixa são até uma ordem de magnitude menores do que os tempos do resolvidor de Programação Quadrática do *Gurobi* baseado em pontos interiores. O número de iterações globais do Método de Benders também é menor, indicando maior precisão na determinação de variáveis duais, etapa fundamental para a geração de planos cortantes de Benders, apontando para a redução do infame efeito *tail-off*.

Tabela 8 – *GUROBI 10 - Stand-alone* versus GBD. No primeiro grupo de resultados, subproblemas resolvidos pelo pacote comercial. No segundo, subproblemas resolvidos pelo Método de Projeção em Caixa (MPC).

Gurobi 10		GBD – GUROBI 10			GBD – MPC		
K	Tempo [s]:	Tempo [s]:	# Iterações :	Tempo/Iter. [s] :	Tempo [s]:	# Iterações :	Tempo/Iter. [s] :
4	586	6822	22	310	418	16	26
5	321	4100	24	171	489	16	31
6	349	7066	22	321	504	13	39

Fonte: Os Autores (2023).

Cabe aqui ressaltar que a disponibilidade, para o momento, de uma única instância de médio porte dificulta traçar análises mais representativas, dado que o número de experimentos, como mencionado anteriormente, é exíguo.

Para apresentar as contribuições deste trabalho para uma audiência acadêmica relevante, um número consideravelmente maior de instâncias precisará ser solucionado por todas as técnicas em questão. É desejável ainda que o número de cenários gerados seja substancialmente maior, crescendo em taxas proporcionais a n^2 ou n^3 , o que permitiria caracterizar minimamente tais novas instâncias como *problemas de grande escala*. Apesar dessas limitações, a dominância, em termos de tempo de solução, do Método de Projeção em Caixa sobre a abordagem de pontos interiores utilizada no pacote *GUROBI 10* é destacada na Tabela 8, uma vez que o algoritmo especializado proposto se mostra de 5,51 a 11,92 vezes mais veloz.

Quanto à precisão na obtenção de preços duais significativos, essa dominância também pode ser observada. O algoritmo de Benders integrado ao resolvidor especializado reduz entre 6 e 9 o número de iterações globais para alcançar prova de otimalidade, se comparado ao Método de Benders Generalizado que utiliza o resolvidor comercial para tratar os subproblemas.

Quanto aos tempos totais de solução, a dominância supracitada é notavelmente menos estrita. O *GUROBI 10* é bastante veloz em modo *Stand-Alone*, e consegue desempenho superior em 2 dos 3 casos testados. Pode-se afirmar, todavia, que os tempos de solução do algoritmo de Benders Generalizado não estão tão distantes, sendo melhores em um caso, exatamente aquele em que o resolvidor tem maior dificuldade, com $K = 4$. Essa dominância difusa também é um indício de que a instância de trabalho é muito pequena para que algoritmos de decomposição possam mostrar onde são de fato superiores, dado que a perda-de-informação por decomposição é bem conhecida e documentada na literatura, assim como a velocidade-de-recuperação dessa informação projetada para fora do programa mestre é uma usual medida do desempenho de tais esquemas.

Novas baterias de testes poderão confirmar se a superioridade do Método de Benders ocorre apenas quando a instância alvo é difícil de resolver para o pacote ou se também é função do tamanho, embora se espere que deva ocorrer uma imbricação dessas duas tendências: quanto maior e mais difícil de tratar for a instância, mais veloz — em relação ao *GUROBI 10* — deve se mostrar o algoritmo desenvolvido.

6 Conclusões e Pesquisa Futura

6.1 Conclusões

A finalidade deste trabalho foi propor a reformulação do Problema de Seleção de Portfólios de Média-Variância, utilizando-se uma formulação de Programação Estocástica em dois estágios, a ser tratada com o Método de Decomposição de Benders Generalizado, e analisar a performance da utilização das técnicas de Projeção em Caixa, confrontando-as com o clássico Método do Conjunto Ativo, para solucionar o Subproblema de Benders com eficácia superior.

O Problema de Seleção de Portfólios possui como dados de entrada o retorno médio dos ativos e a matriz de Variância-Covariância. Dependendo do comportamento da matriz de Variância-Covariância, o modelo pode apresentar instabilidade numérica.

Para contornar essas dificuldades de ordem numérica, a técnica de encolhimento *Stein-Type Shrinkage* de Ledoit e Wolf (2004) foi empregada, garantindo que a matriz produzida sempre será definida-positiva.

Para resolver o subproblema de Benders eficientemente, duas técnicas foram testadas: o Algoritmo do Conjunto Ativo e o Método de Projeção em Caixa. Os testes computacionais foram realizados utilizando-se instâncias com até 1.200 ativos.

Resultados computacionais mostraram a superioridade do Método de Projeção em Caixa em relação ao Algoritmo do Conjunto Ativo. Em termos do número de iterações, o Método de Projeção em Caixa, mostrou um desempenho significativamente superior ao Algoritmo do Conjunto Ativo. Especificamente, no pior caso, com 1.200 ativos, o Método de Projeção em Caixa chega a ser 146 vezes mais rápido do que o Algoritmo do Conjunto Ativo. Adicionalmente, levando-se em consideração o tempo computacional, constatou-se que o Método de Projeção em Caixa proporciona uma vantagem considerável. Em termos de tempo de execução, o referido método mostrou-se até 83 vezes mais veloz do que o Algoritmo do Conjunto Ativo, também considerando o pior caso com 1.200 ativos.

Esse desempenho superior se manteve quando o resolvidor foi integrado ao Método de Decomposição de Benders Generalizado, dado que o uso do resolvidor especializado tornou o método até 14 vezes mais veloz. Espera-se que ao aumentar o número de cenários e o número de ativos, produzindo instâncias de porte superior, essa tendência prevaleça. Se tal hipótese se mostrar correta, este fato pode impactar positivamente a capacidade da solução desenvolvida de resolver ou aproximar a solução de problemas de escala muito maior.

É importante ressaltar que o Algoritmo do Conjunto Ativo trabalha identificando uma restrição bloqueante em cada iteração, e alguns iterandos podem estar localizados no interior da região viável. Isso impede a utilização das informações dos custos reduzidos (multiplicadores lagrangianos) para identificar a próxima restrição bloqueante, resultando na perda da informação da trajetória.

Diferentemente do Algoritmo do Conjunto Ativo, o Método de Projeção em Caixa, em vez de simplesmente detectar uma restrição bloqueante a cada iteração, detecta um conjunto de restrições violadas. A atualização do conjunto de restrições ativas é baseada nas informações dos multiplicadores lagrangianos e o passo é atualizado na direção dessas restrições.

Por fim, a versão estocástica do Problema de Seleção de Portfólios em dois estágios, apresentou melhores resultados, quando comparado ao modelo equivalente determinístico proposto por [Cesarone, Scozzari e Tardella \(2013\)](#). Ressalta-se que o objetivo desse modelo alternativo é aumentar - a custo razoável - a blindagem a risco, pré-computando uma função de reação, o que poderia permitir implantar um tipo de resposta automática em softwares de realocação de investimentos utilizados por Agências de Gestão de Ativos.

6.2 Pesquisa Futura

Pesquisas futuras devem estender a base de testes para instâncias de tamanho e complexidade superiores, o que dotaria a análise de resultados experimentais de maiores subsídios para decidir em qual nicho as técnicas desenvolvidas neste trabalho seriam a melhor escolha.

Também é pertinente realizar experimentos com técnicas de aceleração do Método de Decomposição de Benders Generalizado, como a incorporação de cortes Pareto-ótimos, ou até mesmo a possível modificação dos planos cortantes gerados para exibir as propriedades poliédricas, conforme o estado-da-arte da técnica preconiza.

Modelos diferentes para a determinação da incerteza e para determinação da matriz de covariância poderiam ainda ser empregados, e todos os resultados obtidos com tais experimentações poderiam então ser comparados, permitindo uma varredura da dificuldade de solução do problema-alvo e da eficiência da técnica proposta de amplo espectro.

Eventuais conexões com técnicas de controle ótimo podem ainda ser objeto de exploração em trabalhos futuros, caso se opte ainda por incluir decisões de múltiplos estágios ou qualquer outra forma de considerar a dimensão temporal para avaliar impactos cumulativos.

Referências

- ANAGNOSTOPOULOS, K. P.; MAMANIS, G. The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 38, n. 11, p. 14208–14217, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 6, 9 e 14.
- BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. [S.l.: s.n.], 1900. v. 17, p. 21–86. Citado na página 27.
- BAGAJEWICZ, M.; MANOUSIOUTHAKIS, V. On the generalized benders decomposition. *Computers & chemical engineering*, Elsevier, v. 15, n. 10, p. 691–700, 1991. Citado 5 vezes nas páginas 3, 5, 6, 13 e 20.
- BERTSIMAS, D.; SHIODA, R. Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 43, n. 1, p. 1–22, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 14.
- BIENSTOCK, D. Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems. *Mathematical programming*, Springer, v. 74, n. 2, p. 121–140, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 14.
- BLAND, R. G. New finite pivoting rules for the simplex method. *Mathematics of operations Research*, INFORMS, v. 2, n. 2, p. 103–107, 1977. Citado na página 38.
- BOMZE, I. M. On standard quadratic optimization problems. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 13, n. 4, p. 369–387, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 14.
- BORCHERS, B.; MITCHELL, J. E. An improved branch and bound algorithm for mixed integer nonlinear programs. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 21, n. 4, p. 359–367, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 6 e 14.
- BRANKE, J.; SCHECKENBACH, B.; STEIN, M.; DEB, K.; SCHMECK, H. Portfolio optimization with an envelope-based multi-objective evolutionary algorithm. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 199, n. 3, p. 684–693, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 14.
- CALLOT, L.; CANER, M.; ÖNDER, A. Ö.; ULAŞAN, E. A nodewise regression approach to estimating large portfolios. *Journal of Business & Economic Statistics*, Taylor & Francis, v. 39, n. 2, p. 520–531, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.
- CANAKGOZ, N. A.; BEASLEY, J. E. Mixed-integer programming approaches for index tracking and enhanced indexation. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 196, n. 1, p. 384–399, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 6, 8 e 14.
- CESARONE, F.; MORETTI, J.; TARDELLA, F. Why small portfolios are preferable and how to choose them. *Journal of Financial Perspectives*, v. 5, n. 1, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.

CESARONE, F.; SCOZZARI, A.; TARDELLA, F. Efficient algorithms for mean-variance portfolio optimization with hard real-world constraints. *G. Ist. Ital. Attuari*, v. 72, 01 2009. Citado 3 vezes nas páginas 6, 9 e 14.

CESARONE, F.; SCOZZARI, A.; TARDELLA, F. A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 205, n. 1, p. 213–234, 2013. Citado 11 vezes nas páginas 3, 4, 5, 9, 14, 15, 17, 20, 26, 40 e 48.

CHANG, T.-J.; MEADE, N.; BEASLEY, J. E.; SHARAIHA, Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 27, n. 13, p. 1271–1302, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 6, 7 e 14.

CHIAM, S. C.; TAN, K. C.; MAMUM, A. A. Evolutionary multi-objective portfolio optimization in practical context. *International Journal of Automation and Computing*, Springer, v. 5, n. 1, p. 67–80, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 14.

CHOU, X.; MESSINA, E. Problem-driven scenario generation for stochastic programming problems: A survey. *Algorithms*, MDPI, v. 16, n. 10, p. 479, 2023. Citado na página 26.

COFFIN, M.; SALTZMAN, M. J. Statistical analysis of computational tests of algorithms and heuristics. *INFORMS Journal on Computing*, INFORMS, v. 12, n. 1, p. 24–44, 2000. Citado na página 6.

CRAMA, Y.; SCHYNS, M. Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of operational research*, Elsevier, v. 150, n. 3, p. 546–571, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 14.

DENG, X.; HUANG, C. Some new results in theory and application on positive definiteness of portfolio covariance matrix. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, International Association of Engineers, v. 51, n. 1, p. 1–6, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.

FERNÁNDEZ, A.; GÓMEZ, S. Portfolio selection using neural networks. *Computers & operations research*, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 1177–1191, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 6, 8 e 14.

FLETCHER, R. Resolving degeneracy in quadratic programming. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 46, p. 307–334, 1993. Citado na página 38.

GEOFFRION, A. M. Generalized benders decomposition. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 10, p. 237–260, 1972. Citado na página 12.

GILL, P. E.; MURRAY, W.; SAUNDERS, M. A.; WRIGHT, M. H. A practical anti-cycling procedure for linearly constrained optimization. *Mathematical Programming*, Springer, v. 45, n. 1-3, p. 437–474, 1989. Citado na página 38.

GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. [S.l.]: Springer, 2004. v. 53. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.

GOMES, B. N. Uma abordagem evolucionária para o projeto de redes eixo-raio com alocação simples. Universidade Federal de Minas Gerais, 2011. Citado na página 6.

GULLIKSSON, M.; MAZUR, S. An iterative approach to ill-conditioned optimal portfolio selection. *Computational Economics*, Springer, v. 56, n. 4, p. 773–794, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 14.

GULPINAR, N.; AN, L. T. H.; MOEINI, M. Robust investment strategies with discrete asset choice constraints using dc programming. *Optimization*, Taylor & Francis, v. 59, n. 1, p. 45–62, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.

HALL, J. A.; MCKINNON, K. I. The simplest examples where the simplex method cycles and conditions where expand fails to prevent cycling. *Mathematical Programming*, Springer, v. 100, n. 1, p. 133–150, 2004. Citado na página 38.

HARDOROUDI, N. D.; KESHVARI, A.; KALLIO, M.; KORHONEN, P. Solving cardinality constrained mean-variance portfolio problems via milp. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 254, n. 1, p. 47–59, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

HE, F.; QU, R. A two-stage stochastic mixed-integer program modelling and hybrid solution approach to portfolio selection problems. *Information Sciences*, Elsevier, v. 289, p. 190–205, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

HIRSCHBERGER, M.; QI, Y.; STEUER, R. E. Large-scale mv efficient frontier computation via a procedure of parametric quadratic programming. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 204, n. 3, p. 581–588, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.

JIN, Y.; QU, R.; ATKIN, J. Constrained portfolio optimisation: The state-of-the-art markowitz models. 2016. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

JOBSON, J. D.; KORKIE, B. Estimation for markowitz efficient portfolios. *Journal of the American Statistical Association*, Taylor & Francis, v. 75, n. 371, p. 544–554, 1980. Citado na página 29.

KARATZAS, I.; SHREVE, S. *Brownian motion and stochastic calculus*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 113. Citado na página 27.

KONNO, H.; KOSHIZUKA, T. Mean-absolute deviation model. *Iie Transactions*, Taylor & Francis, v. 37, n. 10, p. 893–900, 2005. Citado na página 7.

KWAN, C. C. What really happens if the positive definiteness requirement on the covariance matrix of returns is relaxed in efficient portfolio selection? *Financial Markets and Portfolio Management*, Springer, v. 32, n. 1, p. 77–110, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, v. 10, n. 5, p. 603–621, 2003. ISSN 0927-5398. Citado na página 29.

LEDOIT, O.; WOLF, M. Honey, i shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, Institutional Investor Journals Umbrella, v. 30, n. 4, p. 110–119, 2004. Citado 5 vezes nas páginas 7, 14, 29, 41 e 47.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, [American Finance Association, Wiley], v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. ISSN 00221082, 15406261. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2975974>>. Citado 3 vezes nas páginas 1, 2 e 3.

- MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection, the journal of finance*. 7 (1). 1952. Citado na página 6.
- MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, JSTOR, p. 141–183, 1973. Citado na página 27.
- NYSTRUP, P.; BOYD, S.; LINDSTRÖM, E.; MADSEN, H. Multi-period portfolio selection with drawdown control. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 282, n. 1, p. 245–271, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.
- ROSS, S. M. *Stochastic processes*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- SILVA, D. N. d. *Novas abordagens determinísticas de otimização para resolução do problema de fluxo de potência ótimo*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019. Citado na página 32.
- SUN, R.; MA, T.; LIU, S.; SATHYE, M. Improved covariance matrix estimation for portfolio risk measurement: A review. *Journal of Risk and Financial Management*, MDPI, v. 12, n. 1, p. 48, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 14.
- TOULOU MIS, A. Nonparametric stein-type shrinkage covariance matrix estimators in high-dimensional settings. *Computational Statistics & Data Analysis*, v. 83, p. 251–261, 2015. ISSN 0167-9473. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947314003107>>. Citado na página 29.
- WALTER, C. The brownian motion in finance: An epistemological puzzle. *Topoi*, Springer, v. 40, n. 4, p. 1–17, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- WOLFE, P. A technique for resolving degeneracy in linear programming. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, SIAM, v. 11, n. 2, p. 205–211, 1963. Citado na página 38.